



<b>15.</b>	Przedmiot:	<b>WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW</b>									
<b>Kierunek: Mechatronika</b>											
<b>Specjalność: Elektroautomatyka okrętowa</b>											
<b>Rozkład zajęć w czasie studiów</b>											
Semestr	Liczba tygodni w semestrze	Liczba godzin w tygodniu				Liczba godzin w semestrze				Punkty kredytowe	
		A	Ć	L	S	Σ	A	Ć	L		S
III	15	1	1	–	–	30	15	15	–	–	2
IV	15	1E	1	2	–	60	15	15	30	–	3
Razem w czasie studiów						<b>90</b>	<b>30</b>	<b>30</b>	<b>30</b>	<b>–</b>	<b>5</b>

Nr tematu	Tematy i ich rozwinięcie	Liczba godzin				
		Razem	W	Ć	L	S
<b>Semestr III</b>						
1.	<b>Podstawowe pojęcia i określenia.</b> Siły zewnętrzne i wewnętrzne,. Wykresy rozciągania i ściskania różnych materiałów. Prawo Hooke'a. Prawo Poissona.	4	2	2	–	–
2.	<b>Rozciąganie i ściskanie.</b> Podstawowy warunek wytrzymałościowy. Naprężenia dopuszczalne. Zadania statycznie niewyznaczalne, naprężenia montażowe i termiczne.	6	3	3	–	–
3.	<b>Analiza stanu naprężenia w punkcie,</b> jednoosiowy stan naprężenia, naprężenia główne, koła Mohr'a. Uogólnione prawo Hooke'a.	4	2	2	–	–
4.	<b>Czyste ścinanie,</b> zależność między modułem sprężystości podłużnej a modułem sprężystości postaciowej. Ścinanie techniczne. Obliczenia połączeń spawanych, kołkowych, wpustowych, śrubowych.	4	2	2	–	–
5.	<b>Geometryczne wskaźniki przekrojów.</b>	4	2	2	–	–
6.	<b>Skrećanie przekrojów osiowo symetrycznych i prostokątnych.</b> Obliczenia wałów pędnych.	4	2	2	–	–
7.	<b>Zginanie, wykresy sił tnących i momentów gnących.</b>	4	2	2	–	–
Razem		30	15	15	–	–

### Temat 1 (2 godziny):

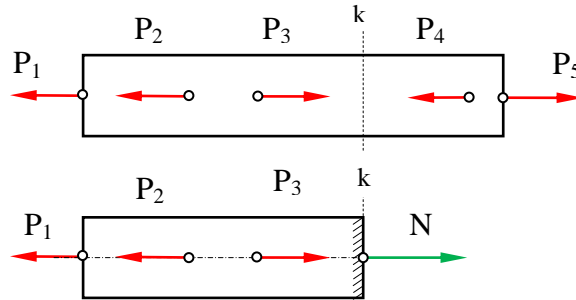
**Podstawowe pojęcia i określenia.** Siły zewnętrzne i wewnętrzne. Wykresy rozciągania i ściskania różnych materiałów. Prawo Hooke'a. Prawo Poissona.

Siły zewnętrzne wynikają z oddziaływania otoczenia na analizowany element. Można je podzielić na siły zewnętrzne czynne, które stanowią obciążenia elementów konstrukcyjnych, oraz na siły zewnętrzne bierne, które są siłami reakcji występującymi w podporach. Natomiast siły wewnętrzne występują wewnątrz materiału elementów konstrukcyjnych. Określane są metodą myślowych przekrojów polegającą na myślowym rozdzieleniu elementu w miejscu ich określania i rozpatrywaniu równowagi statycznej jednej z części. Siła wewnętrzna w rozpatrywanym przekroju poprzecznym równa jest sumie algebraicznej rzutów sił na kierunek osi pręta wszystkich sił zewnętrznych, działających po jednej stronie



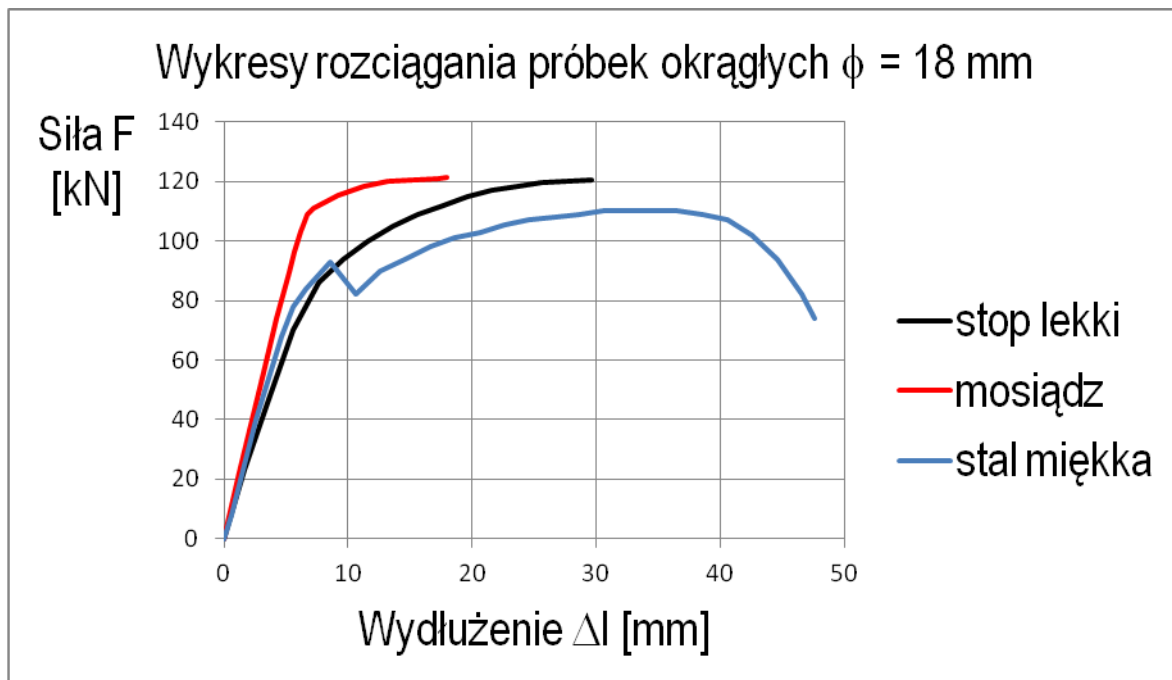
rozpatrywanego myślowego przekroju. Siłę tę nazywa się siłą podłużną. Na przykład siła podłużna w przekroju k-k pręta przedstawionego na rys.1 będzie:

$$N = P_1 + P_2 - P_3$$



Rys.1 Wyznaczanie siły wewnętrznej (podłużnej) N.

Wytrzymałość materiałów jest nauką stosowaną opartą na doświadczeniu. Jednym z najprostszycch badań laboratoryjnych jest statyczna próba rozciągania metali. W jej trakcie podlega zrywaniu próbka wykonana z metalu jako prosty pręt pryzmatyczny o przekroju kołowym lub prostokątnym. Pręt pryzmatyczny to pręt, którego przekrój poprzeczny jest stały co do kształtu i wymiarów. W wyniku próby rozciągania otrzymuje się wykres rozciągania (rys.2).

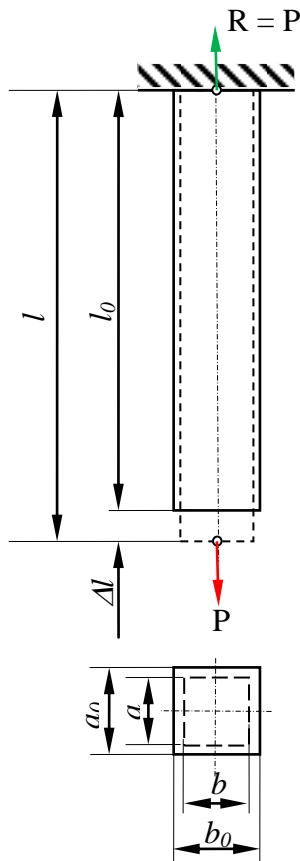


Rys. Przykładowe wykresy rozciągania.

Wydłużeniem lub skróceniem całkowitym  $\Delta l$  nazywamy różnicę długości pręta odkształconego  $l$  pod wpływem obciążenia siłą  $P$  i jego długości początkowej  $l_0$ , przed



przyłożeniem obciążenia (rys.2), czyli:  $\Delta l = l - l_0$ . Wydłużeniem lub skróceniem względnym nazywamy iloraz wydłużenia całkowitego  $\Delta l$  i długości początkowej  $l_0$ :



$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Zależność między naprężeniami  $\sigma$  i odkształceniami  $\varepsilon$  w danym punkcie określa prawo Hooke'a, które dla osiowego stanu naprężenia wyraża się wzorem:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

gdzie E jest stałą materiałową charakteryzującą materiał pod względem sprężystym i nazywa się modułem sprężystości lub współczynnikiem sprężystości podłużnej lub modułem Younga. Przykładowe wartości E dla wybranych materiałów przedstawione są tab.1 Całkowite wydłużenie (skrócenie) pręta wyliczamy podstawiając do powyższego wzoru:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad \text{oraz} \quad \sigma = \frac{N}{A}$$

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{N}{EA} \quad \text{skąd} \quad \Delta l = \frac{Nl_0}{EA} = \frac{N}{k}$$

Rys.2 Odkształcenia wzdłużne i poprzeczne rozciąganego pręta.

EA nazywamy sztywnością przekroju pręta na rozciąganie (ściskanie) zaś  $\frac{EA}{l_0} = k$  sztywnością pręta na rozciąganie (ściskanie). Zmianie długości pręta w kierunku działania sił zewnętrznych towarzyszy zmiana jego wymiarów poprzecznych (rys.2). Miarą tej zmiany jest względne odkształcenie poprzeczne  $\varepsilon_p$  określone wzorem:

$$\varepsilon_p = \frac{\Delta a}{a_0} = \frac{\Delta b}{b_0}$$

gdzie:  $\Delta a = a - a_0$  i  $\Delta b = b - b_0$  są całkowitymi odkształceniami poprzecznymi. Pomiedzy odkształceniami względnymi: poprzecznym  $\varepsilon_p$  i podłużnym  $\varepsilon$  zachodzi zależność zwana prawem Poissona:

$$\varepsilon_p = -\vartheta \varepsilon$$

Liczba  $\vartheta$  jest drugą stałą charakteryzującą materiał pod względem sprężystym i nazywa się liczbą Poissona. Przykładowe wartości  $\vartheta$  dla wybranych materiałów podane są w tab.1.



Tabela 1. Własności wytrzymałościowe niektórych materiałów.

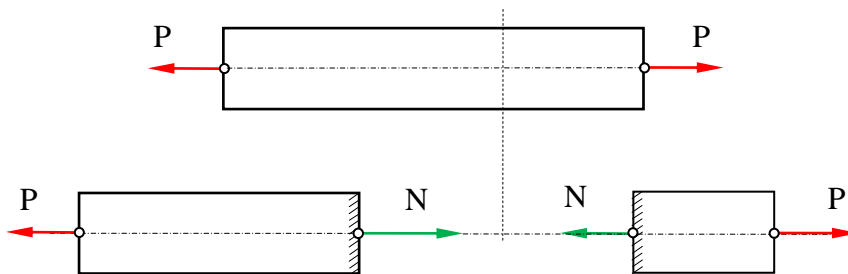
Materiał	Ozna- czenie	Granica wytrzymałości doraźnej $R_m$ [MPa]	Granica plastyczności $R_e$ [MPa]	Moduł Younga E [MPa]	Liczba Poissona $\nu$
Stal konstruk.	S240GP	340	240	$2,1 \cdot 10^5$	0,29
Stal sprężynowa	85	1130	980	$2,15 \cdot 10^5$	0,29
Miedź	Cu-ETP	210	33	$0,8 \cdot 10^5$	0,27
Brąz kutły	CuAl10fe3N	590	250	$1,1 \cdot 10^5$	0,32
Aluminium	EN AW-Al99,99	90	34	$0,7 \cdot 10^5$	0,33
Stop lekki	PA20	270	150	$0,76 \cdot 10^5$	0,32
Żeliwo szare	EN-GJL-150	250	150	$1,03 \cdot 10^5$	0,26



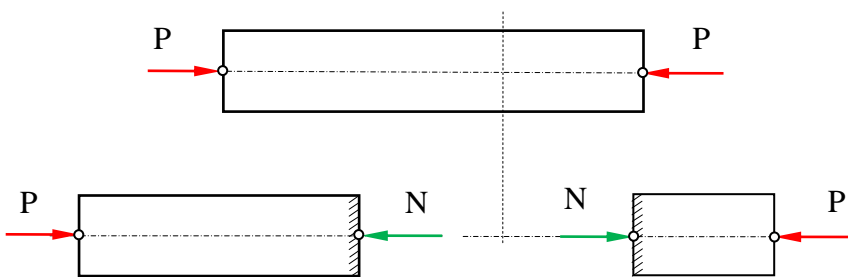
## Temat 2 (3 godziny):

**Rozciąganie i ściskanie.** Podstawowy warunek wytrzymałościowy. Naprężenia dopuszczalne. Zadania statycznie niewyznaczalne, naprężenia montażowe i termiczne.

Przyjmuje się umowę odnośnie znaków: siłę wewnętrzną skierowaną na zewnątrz przekroju uważamy za dodatnią - rozciąganie (rys.2), a skierowaną do wewnątrz przekroju uważamy za ujemną - ściskanie (rys.3). W szczególnym przypadku rozciągania lub ściskania siłami  $P$  przyłożonymi na jego końcach, siła wewnętrzna jest równa jednej z tych sił, czyli odpowiednio:  $N = P$  lub  $N = -P$  (rys.2)



Rys.2 Schemat obciążeń przy rozciąganiu.



Rys.3 Schemat obciążeń przy ściskaniu.

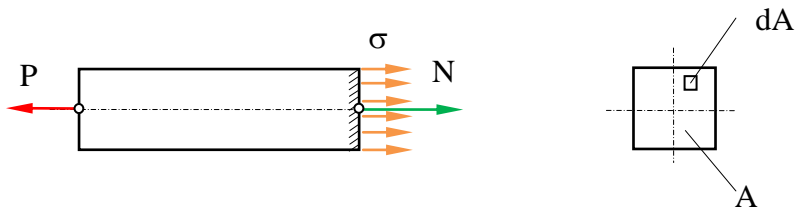
Siła wewnętrzna w dowolnym przekroju poprzecznym pręta jest siłą wypadkową elementarnych sił wewnętrznych  $\sigma dA$ , działających w danym przekroju, czyli:

$$N = \int \sigma$$

Jak wiadomo z teorii (zasada de Saint-Venanta), rozkład naprężeń  $\sigma$  w przekroju poprzecznym pręta rozciąganego, dostatecznie oddalonym od miejsca przyłożenia sił zewnętrznych, jest równomierny (rys.4), wobec czego możemy zapisać:



$$\sigma = \frac{N}{A}$$



Rys.4

Znając wzór na naprężenia  $\sigma = \frac{N}{A}$  możemy napisać podstawowy warunek wytrzymałościowy dla rozciągania lub ściskania:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq k_r \quad \text{lub} \quad \sigma = \frac{N}{A} \leq k_c$$

gdzie:  $k_r$  – naprężenie dopuszczalne na rozciąganie,  
 $k_c$  – naprężenie dopuszczalne na ściskanie.

Naprężenie dopuszczalne dla materiałów sprężysto-plastycznych obliczamy z zależności:

$$k_r = \frac{R_e}{n_e} \quad \text{lub} \quad k_c = \frac{R_{e(c)}}{n_{e(c)}}$$

dla materiałów kruchych :

$$k_r = \frac{R_m}{n_m} \quad \text{lub} \quad k_c = \frac{R_{m(c)}}{n_{m(c)}}$$

gdzie:

$R_{e(c)}$  – granica plastyczności przy rozciąganiu (ściskaniu) dla materiałów sprężysto-plastycznych, przykładowe wartości w tab.1

$R_{m(c)}$  – granica wytrzymałości doraźnej przy rozciąganiu (ściskaniu) dla materiałów kruchych, przykładowe wartości w tab.1

$n_e, n_m$  – współczynnik bezpieczeństwa odniesiony odpowiednio do granicy plastyczności, odniesiony do granicy wytrzymałości doraźnej.

$n_{e(c)}, n_{m(c)}$  – współczynnik bezpieczeństwa odniesiony odpowiednio do granicy plastyczności przy ściskaniu, odniesiony do granicy wytrzymałości doraźnej przy ściskaniu.

Współczynnik bezpieczeństwa jest liczbą zawsze większą od jedności. Jego dobór jest jednym z ważniejszych zadań w procesie obliczeń wytrzymałościowych. W wielu dziedzinach wprowadzono normy zobowiązujące do przestrzegania odpowiednich wartości współczynników bezpieczeństwa. Im mniejszy współczynnik bezpieczeństwa tym konstrukcje są lżejsze, ale mniej bezpieczne.



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Zadania statycznie niewyznaczalne.

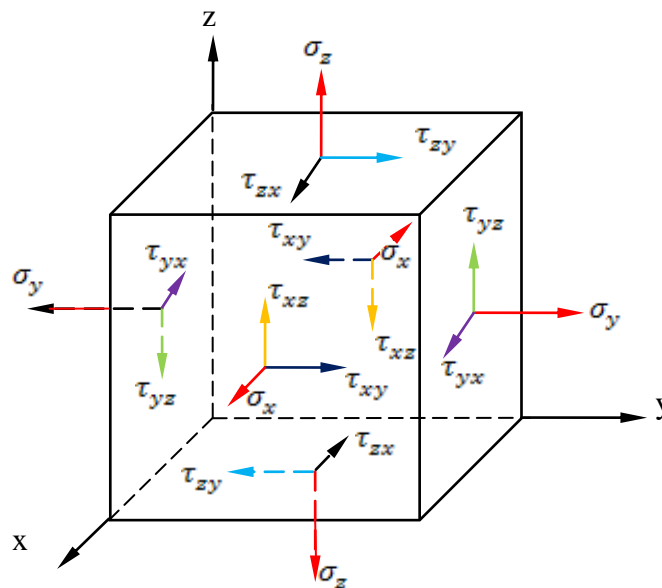
Za pomocą równań statyki możemy rozwiązać (wyznaczyć niewiadome siły, przeważnie reakcje podpór) tylko te zadania, w których liczba niewiadomych sił jest równa liczbie równań równowagi wynikających ze statyki dla danego układu sił. Mechanika ciała odkształcalnego (wytrzymałość materiałów), wykorzystując związki między siłami a odkształceniami, umożliwia rozwiązywanie takich zadań w których liczba niewiadomych reakcji jest większa od liczby równań równowagi, czyli zadań statycznie niewyznaczalnych. W układach statycznie wyznaczalnych małe odkształcenia elementów, spowodowane siłami obciążającymi są od siebie niezależne. Natomiast w konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych odkształcenia elementów są od siebie wzajemnie uzależnione i muszą spełniać określone związki wynikające z geometrii konstrukcji i kierunków sił obciążających. Każda dodatkowa podpora czy pręt powoduje ograniczenie swobodnego odkształcania się konstrukcji w postaci pewnego związku geometrycznego pomiędzy odkształceniami, który po zastosowaniu prawa Hooke'a daje dodatkowe równanie wiążące niewiadome reakcje. Dla prawidłowego ułożenia dodatkowych równań, wynikających z zależności między odkształceniami, należy nanieść na rysunek konstrukcji odkształcenia poszczególnych elementów i dopiero na podstawie tego rysunku znaleźć i zapisać zależności geometryczne między nimi.



### Temat 3 (2 godziny):

**Analiza stanu naprężenia w punkcie**, jednoosiowy stan naprężenia, naprężenia główne, koła Mohr'a. Uogólnione prawo Hooke'a.

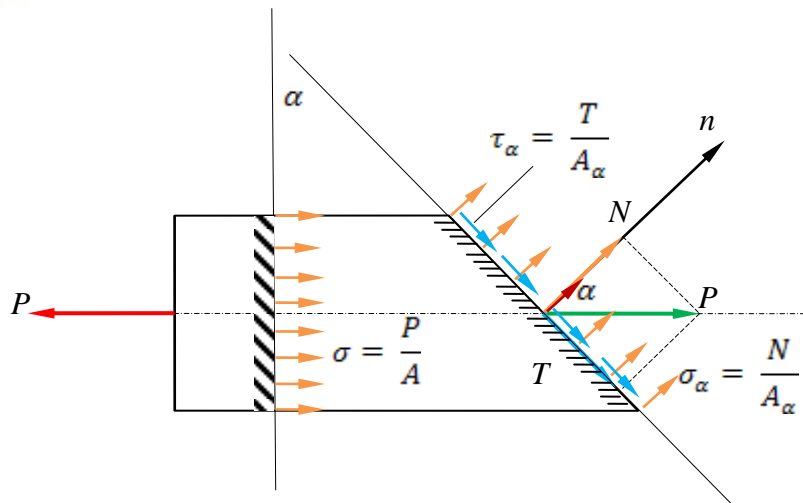
Stanem naprężenia w danym punkcie nazywamy zbiór naprężeń w danym punkcie, na wszystkich dowolnie zorientowanych płaszczyznach przekrojów, przechodzących przez ten punkt. Podobnie stanem odkształcenia w danym punkcie ciała nazywamy zbiór odkształceń liniowych i kątowych występujących we wszystkich dowolnie zorientowanych płaszczyznach, przechodzących przez ten punkt. W przypadku ogólnym stan naprężenia określa sześć niezależnych składowych stanu naprężenia: trzy składowe normalne  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  oraz trzy składowe styczne  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ . Pozostałe trzy naprężenia styczne  $\tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$  są zależne:  $\tau_{yx} = -\tau_{xy}$ ,  $\tau_{zx} = -\tau_{xz}$ ,  $\tau_{zy} = -\tau_{yz}$ . Ogólny przestrzenny stan naprężenia w punkcie przedstawiono na rys.9 na elementarnej kostce zawierającej ten punkt.



Rys.9 Ogólny przestrzenny stan naprężenia

Jednoosiowy stan naprężenia.





Rys.10 Jednoosiowy stan naprężenia

Siłę wewnętrzną  $P$  rozkładamy na dwie wzajemnie do siebie prostopadłe składowe, w kierunku normalnej zewnętrznej  $N$  i w kierunku stycznej do rozpatrywanego przekroju  $T$ :

$$N = P \cos \alpha ; T = P \sin \alpha$$

Naprężenia  $\sigma_\alpha$  i  $\tau_\alpha$  w dowolnie obranym przekroju określonym kątem  $\alpha$  wyniosą:

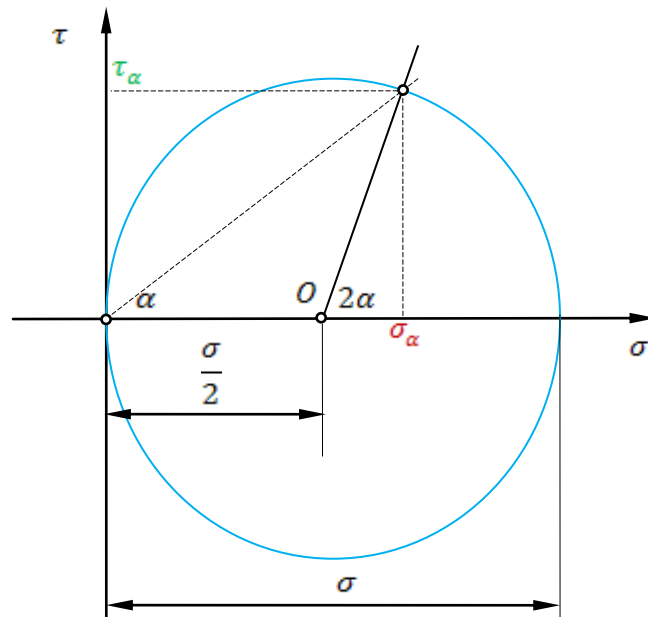
$$\sigma_\alpha = \frac{N}{A_\alpha} = \frac{P \cos \alpha}{\frac{A}{\cos \alpha}} = \frac{P \cos^2 \alpha}{A} = \sigma \cos^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = \frac{T}{A_\alpha} = \frac{P \sin \alpha}{\frac{A}{\cos \alpha}} = \frac{P \sin \alpha \cos \alpha}{A} = \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha$$

Naprężenia normalne  $\sigma_\alpha$  są dodatnie (rozciągające), jeżeli mają zwrot zgodny z kierunkiem normalnej zewnętrznej  $n$ . Naprężenia  $\tau_\alpha$  są dodatnie, jeżeli dla pokrycia się wektora tego naprężenia z kierunkiem normalnej zewnętrznej  $n$  trzeba obrócić wektor  $\tau_\alpha$  najkrótszą drogą w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Znak naprężenia stycznego nie ma znaczenia praktycznego ani fizycznego, lecz tylko formalne, umożliwiające jednoznaczną interpretację matematyczną i geometryczną.

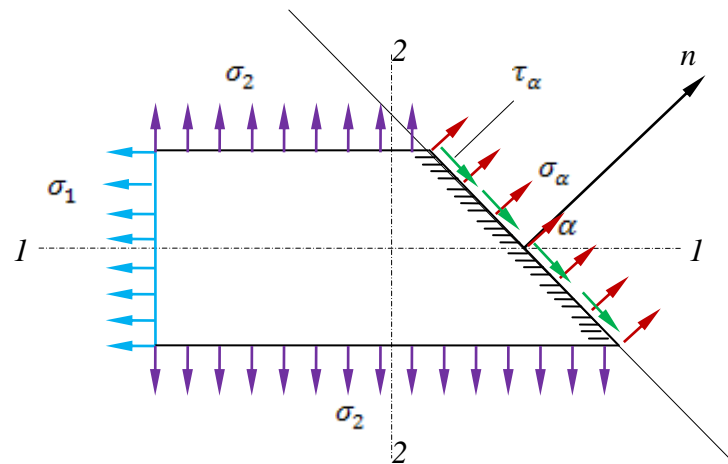
Koło Mohr'a dla jednoosiowego stanu naprężenia.

Wzory na  $\sigma_\alpha$  i  $\tau_\alpha$  dają się łatwo przedstawić wykreślnie za pomocą tzw. koła Mohra. W prostokątnym układzie współrzędnych  $\sigma, \tau$  odkładamy na osi odciętych punkt  $O$  w odległości od początku układu współrzędnych równej  $\frac{\sigma}{2}$ , będący środkiem koła Mohra. Zakreślamy okrąg o promieniu równym  $\frac{\sigma}{2}$ . Ze środka  $O$  koła Mohra odmierzymy od osi  $\sigma$  kąt  $2\alpha$ . Otrzymamy na okręgu punkt o współrzędnych określonych wzorami na  $\sigma_\alpha$  i  $\tau_\alpha$ .



Rys.11 Koło Mohra dla jednoosiowego stanu naprężenia.

Dwukierunkowy (płaski) stan naprężenia.



Rys.10 Dwukierunkowy (płaski) stan naprężenia.

Prostokątna płytką niech będzie poddana działaniu naprężeń  $\sigma_1$  w kierunku  $1-1$  oraz naprężeń  $\sigma_2$  w kierunku  $2-2$ . Są to naprężenia główne. Występują w przekrojach głównych, czyli takich w których znikają naprężenia styczne. Naprężenia główne przyjmują ekstremalne wartości naprężeń  $\sigma$ . Aby wyznaczyć naprężenia  $\sigma_\alpha$  oraz  $\tau_\alpha$  jakie występują w przekroju określonym kątem  $\alpha$  rozpatrujemy lewą odciętą część płytki a działanie prawej części zastępujemy naprężeniami  $\sigma_\alpha$  oraz  $\tau_\alpha$ . Wartości tych naprężeń wyznaczamy stosując metodę superpozycji rozpatrując dwa jednoosiowe stany naprężeń. Pierwszy jednoosiowy stan to obciążenie tylko naprężeniami  $\sigma_1$ :

$$\sigma_{\alpha 1} = \sigma_1 \cos^2 \alpha \quad \tau_{\alpha 1} = \frac{1}{2} \sigma_1 \sin 2\alpha$$

Drugi jednoosiowy stan to obciążenie tylko naprężeniami  $\sigma_2$ . Kąt jaki tworzy z osią rozciągania  $2-2$  normalna zewnętrzna  $n$  wynosi  $-(90^\circ - \alpha)$ . Otrzymamy zatem:

$$\sigma_{\alpha 2} = \sigma_2 \cos^2 (-(90^\circ - \alpha)) = \sigma_2 \cos^2 (\alpha - 90^\circ) = \sigma_2 \sin^2 \alpha$$

$$\tau_{\alpha 2} = \frac{1}{2} \sigma_2 \sin [2(-(90^\circ - \alpha))] = -\frac{1}{2} \sigma_2 \sin 2\alpha$$

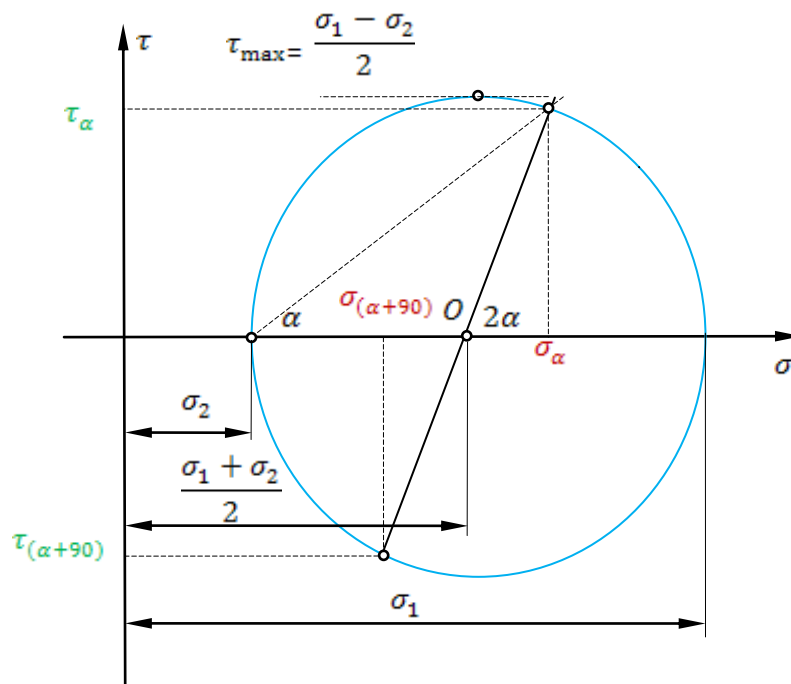
Naprężenia  $\sigma_\alpha$  i  $\tau_\alpha$  będą równe sumie składowych w jednoosiowych stanach:

$$\sigma_\alpha = \sigma_{\alpha 1} + \sigma_{\alpha 2} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha$$

$$\tau_\alpha = \tau_{\alpha 1} + \tau_{\alpha 2} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha$$



Wzory na  $\sigma_\alpha$  i  $\tau_\alpha$  można przedstawić wykreślnie za pomocą koła Mohra dla dwuosowego stanu naprężenia.



Rys.12 Koło Mohra dla dwuosowego stanu naprężenia.

Środek koła Mohra dla dwuosowego stanu naprężenia ma współrzędną równą  $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$  natomiast promień koła wynosi  $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ . Ze środka  $O$  koła Mohra odczytujemy od osi  $\sigma$  kąt  $2\alpha$ . Otrzymamy na okręgu punkt o współrzędnych  $\sigma_\alpha$  i  $\tau_\alpha$ . Z koła Mohra możemy odczytać wszystkie wnioski, wynikające z analizy naprężeń w punkcie, a mianowicie:

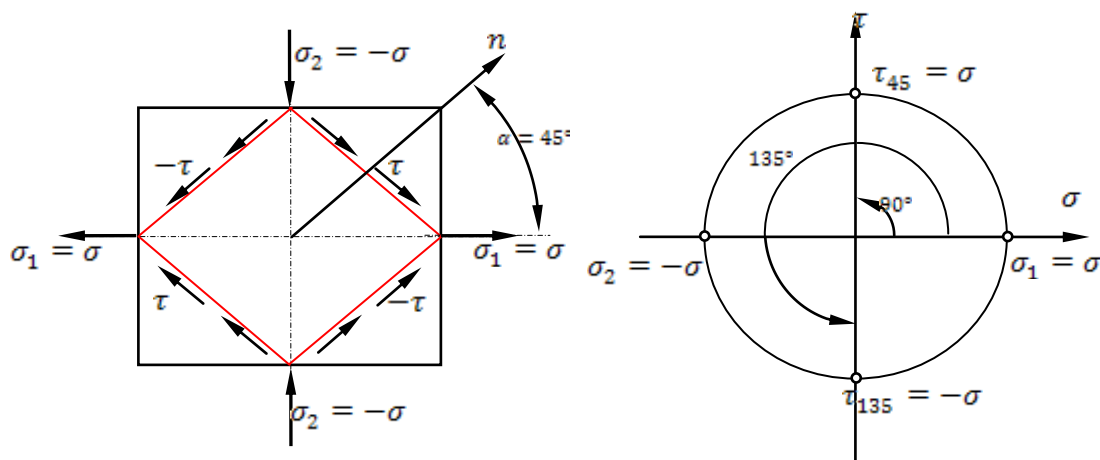
$$\begin{aligned}\tau_{(\alpha+90)} &= -\tau_\alpha \\ \sigma_1 + \sigma_2 &= \sigma_\alpha + \sigma_{(\alpha+90)} \\ \sigma_2 &\leq \sigma_\alpha \leq \sigma_1 \\ \tau_{max} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)\end{aligned}$$



## Temat 4 (2 godziny):

*Czyste ścinanie, zależność między modułem sprężystości podłużnej a modułem sprężystości postaciowej. Ścinanie techniczne. Obliczenia połączeń spawanych, kołkowych, wpustowych, śrubowych*

Szczególnym przypadkiem płaskiego stanu naprężenia jest czyste ścinanie. Zachodzi ono wtedy, gdy naprężenia główne są sobie równe, a znaki mają przeciwne;  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = -\sigma$ . Jak łatwo zauważyć w przekrojach pod kątem  $\alpha = 45^\circ$  występują tylko naprężenia styczne o wartości naprężeń głównych  $\sigma$ .



Rys.13 Czyste ścinanie i koło Mohra dla tego stanu.

*Zależność między modułem sprężystości podłużnej a modułem sprężystości postaciowej*

Czyste ścinanie jest obok osiowego rozciągania lub ściskania najprostszym przypadkiem stanu naprężenia, a odkształcenie przy czystym ścinaniu jest odkształceniem czysto postaciowym. Wielkością charakteryzującą odkształcenia przy czystym ścinaniu jest kąt odkształcenia postaciowego  $\gamma$ , dany wzorem:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

gdzie stała materiałowa  $G$  jest modułem sprężystości postaciowej. Jest to kąt o jaki zmieniają się kąty proste elementarnego kwadratu, wyciętego myślowo z rozważanej płytki kwadratowej o boku  $a$  w taki sposób, że jego boki tworzą z kierunkami głównymi kąty  $45^\circ$ , pod wpływem naprężeń  $\tau$  (czerwony kwadrat z rys.14). Wzór powyższy nosi nazwę prawa Hooke'a przy ścinaniu. Aby wyznaczyć kąt odkształcenia postaciowego  $\gamma$ , na podstawie rys.14 można zapisać:



$$\operatorname{tg}\left(45^{\circ}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\frac{a-\Delta a}{2}}{\frac{a+\Delta a}{2}}=\frac{a-\Delta a}{a+\Delta a}$$

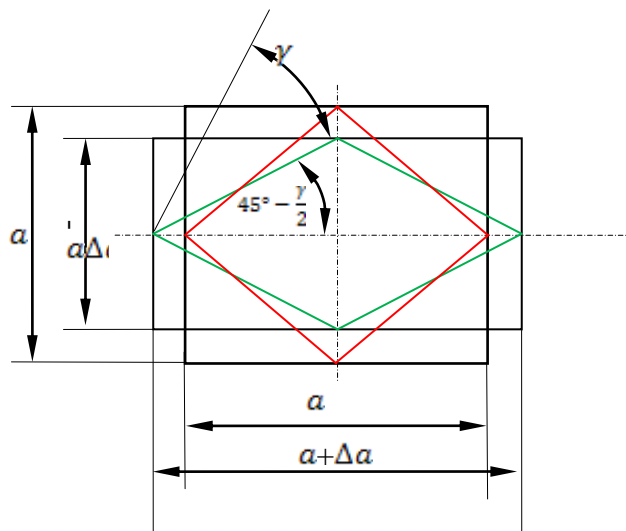
Ponieważ  $\frac{\Delta a}{a} = \varepsilon \rightarrow \Delta a = \varepsilon a$ , otrzymamy:

$$\operatorname{tg}\left(45^{\circ}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{a-\varepsilon a}{a+\varepsilon a}=\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

Korzystając z wzorów redukcyjnych na tangens różnicy kątów, oraz przyjmując, że  $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \approx \frac{\gamma}{2}$ , ponieważ kąt  $\gamma$  mierzony w radianach jest bardzo mały, otrzymamy:

$$\operatorname{tg}\left(45^{\circ}-\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}45^{\circ}-\operatorname{tg}45^{\circ}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}45^{\circ}+\operatorname{tg}45^{\circ}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}=\frac{1-\frac{\gamma}{2}}{1+\frac{\gamma}{2}}$$

$$\frac{1-\frac{\gamma}{2}}{1+\frac{\gamma}{2}}=\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \rightarrow \varepsilon=\frac{\gamma}{2}$$



Rys.14 Odkształcenia kwadratowej płytki przy czystym ścinaniu.

Odkształcenie  $\varepsilon$  wyznaczone w kierunku poziomym wyniesie:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_1}{E} - \vartheta \frac{\sigma_2}{E} = \frac{\sigma}{E} - \vartheta \frac{-\sigma}{E} = \frac{\sigma}{E} (1 + \vartheta)$$



czyli:

$$\frac{\sigma}{E}(1 + \vartheta) = \frac{\gamma}{2} = \frac{\tau}{2G}$$

Jak widać z rys.13 naprężenia tnące  $\tau$  równe są co do wartości naprężeniom  $\sigma$

$$\frac{\sigma}{E}(1 + \vartheta) = \frac{\sigma}{2G}$$

Ostatecznie zależność między modułem sprężystości podłużnej a modułem sprężystości postaciowej:

$$G = \frac{E}{2(1 + \vartheta)}$$

*Ścinanie techniczne.*

Czyste ścinanie występuje w zagadnieniach technicznych bardzo rzadko. Przeważnie, obok naprężeń stycznych, mających dominujące znaczenie, występują w elementach konstrukcyjnych także naprężenia normalne, dając złożony, często dość skomplikowany stan naprężenia. Ma to miejsce we wszelkiego rodzaju elementach łączących, jak: nity, spoiny, sworznie, czopy i wpusty, przy wykrawaniu otworów i cięciu nożycami, a także w innych elementach konstrukcyjnych, w których ścinanie odgrywa zasadniczą rolę, jak np. łbie śruby. W tych przypadkach obliczenia wytrzymałościowe ograniczają się w praktyce do obliczeń na ścinanie, zakładając równomierny rozkład naprężeń tnących na całej powierzchni przekroju obliczanego elementu, oraz do sprawdzenia na docisk powierzchniowy współpracujących elementów. Naprężenia tnące obliczamy ze wzoru:

$$\tau = \frac{T}{A_s} \leq k_t$$

gdzie:  $T$  - siła styczna,  $A_s$  - całkowita powierzchnia ścinanego przekroju,  $k_t$  - naprężenie dopuszczalne na ścinanie.

Obliczenia na docisk, podobnie jak na ścinanie, opieramy na założeniu, że rozkłada się on równomiernie na całej powierzchni styku, a przypadku elementów okrągłych równomiernie na przekroju średnicowym. Naprężenia na docisk obliczamy ze wzoru:

$$\sigma_d = \frac{P}{A_d} \leq k_d$$

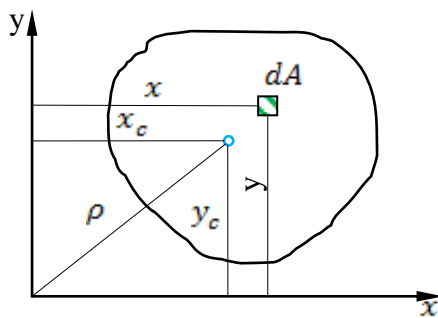
gdzie:  $P$  - siła docisku,  $A_d$  - całkowita lub umowna ( w przypadku nitów i sworzni) powierzchnia styku,  $k_d$  - naprężenie dopuszczalne na docisk.



## Temat 5 (2 godziny):

### Geometryczne wskaźniki przekrojów

W obliczeniach elementów na rozciąganie lub ściskanie osiowe oraz na ścinanie techniczne zakładamy równomierny rozkład naprężeń w przekroju, wobec czego w odpowiednich wzorach na naprężenia i odkształcenia występuje tylko pole powierzchni przekroju. W elementach skręcanych lub zginanych rozkład naprężeń w przekroju poprzecznym nie jest równomierny, wobec czego ma tu znaczenie nie tylko wartość pola powierzchni, lecz także jego kształt. Od figury przekroju poprzecznego zależy położenie środka geometrycznego oraz zależą momenty statyczne, momenty bezwładności i momenty zbroczenia.



Moment statyczny  $S$  figury płaskiej względem wybranej prostej leżącej w płaszczyźnie tej figury np. osi  $x$  określa zależność:

$$S_x = \int_A y \, dA$$

analogicznie względem osi  $y$ :

$$S_y = \int_A x \, dA$$

Rys.16 .

Położenie (współrzędne) środka geometrycznego wyznaczamy ze wzorów:

$$x_c = \frac{S_y}{A} \quad y_c = \frac{S_x}{A}$$

Osie przechodzące przez środek geometryczny figury nazywamy osiami centralnymi. Moment statyczny figury płaskiej względem osi centralnej jest równy zero.

Moment bezwładności figury płaskiej względem osi  $x$ ,  $y$  czy punktu  $O$  określają zależności:

$$J_x = \int_A y^2 \, dA \quad J_y = \int_A x^2 \, dA \quad J_o = \int_A \rho^2 \, dA$$

Punkt  $O$  nazywamy biegunem, a  $J_o$  biegunowym momentem bezwładności. Wymiarem momentów bezwładności jest  $m^4$ . Momenty bezwładności względem prostej i punktu są zawsze dodatnie. Ponieważ  $\rho^2 = x^2 + y^2$  to zachodzi zależność:





$$I_o = J_x + J_y$$

czyli moment bezwładności względem punktu leżącego w jej płaszczyźnie jest równy sumie momentów bezwładności względem dwóch prostopadłych do siebie prostych, przechodzących przez ten punkt i leżących w płaszczyźnie figury. Wyrażenia :

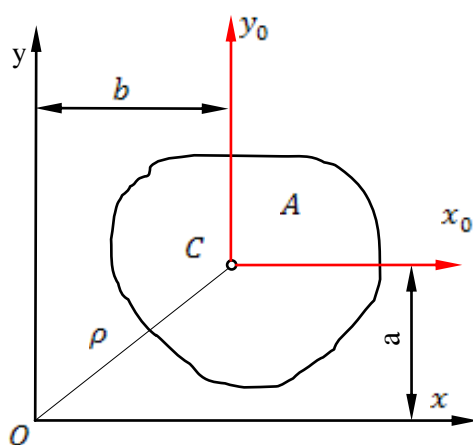
$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} \quad \text{oraz} \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}$$

nazywamy promieniami bezwładności figury płaskiej osi  $x$  i  $y$ .

Moment odśrodkowy (dewiacyjny, zboczenia) figury płaskiej względem osi  $x$ ,  $y$  leżących w płaszczyźnie tej figury określa wyrażenie:

$$I_{xy} = \int_A xy \, dA$$

Jego wartość może być dodatnia, ujemna lub równa zero.



Jeżeli równoległe do danych osi  $x$ ,  $y$  poprowadzimy osie centralne  $x_0$ ,  $y_0$  to między momentami względem tych osi zachodzi związek:

$$I_x = J_{x_n} + a^2 A \quad J_y = J_{y_n} + b^2 A$$

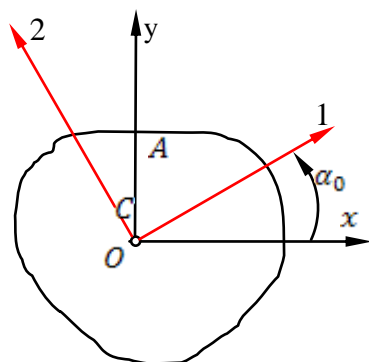
$$I_{xy} = J_{x_0 y_0} + abA$$

Zależności te nazywane są twierdzeniami Steinera.

Rys.17

Układ osi, przechodzący przez dany punkt, względem których moment dewiacyjny jest równy zero, nazywamy głównymi osiami bezwładności, a momenty bezwładności względem tych osi nazywamy głównymi momentami bezwładności. Główne momenty bezwładności, które oznaczamy indeksami 1,2 przyjmują wartości ekstremalne w stosunku do momentów bezwładności względem innych osi o tym samym początku układu, czyli:

$$I_2 \leq J_y \leq J_x \leq I_1$$



Znając dla danej figury płaskiej momenty bezwładności i moment zbrożenia względem wybranych osi  $O, x, y$  możemy wyznaczyć główne momenty bezwładności względem układu  $O, 1, 2$  oraz kąt  $\alpha_0$  o jaki należy obrócić układ osi  $O, x, y$  aby otrzymać układ  $O, 1, 2$  według wzorów:

$$I_1 = \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \sqrt{\left[\frac{1}{2}(J_x - J_y)\right]^2 + J_{xy}^2}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(J_x + J_y) - \sqrt{\left[\frac{1}{2}(J_x - J_y)\right]^2 + J_{xy}^2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2J_{xy}}{J_x - J_y} \quad \text{przyjęto że: } J_y \leq J_x$$

Rys.18

Jeżeli figura ma oś symetrii, to ta oś wraz z każdą prostą do niej prostopadłą są głównymi osiami bezwładności.

#### Przykład

Wyznaczyć momenty bezwładności i promienie bezwładności prostokąta o wymiarach  $b \times h$ , względem osi  $x, y$  będących osiami symetrii.



Dla obliczenia  $I_x$  wybieramy pole elementarne :

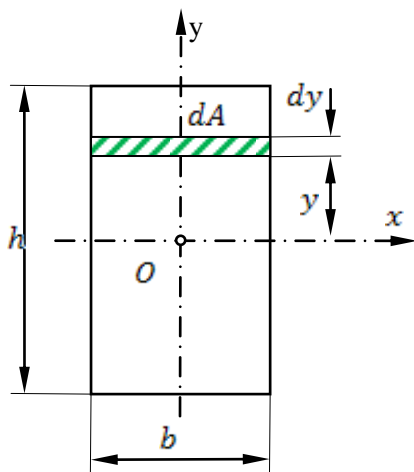
$$dA = b dy$$

i podstawiamy do wzoru:

$$I_x = \int_A y^2 dA = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = b \left[ \frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}$$

Analogicznie otrzymamy:

$$I_y = \int_A x^2 dA = \frac{hb^3}{12}$$



Rys.18

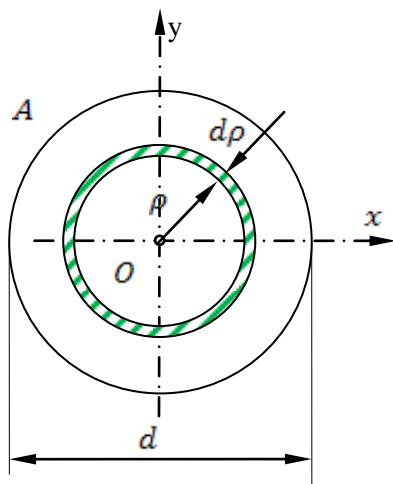
Dla obliczenia promieni bezwładności zastosujemy wzory:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}}$$

Przykład

Wyznaczyć moment bezwładności koła względem jego środka i względem jego średnicy.



Ze względu na kołową symetrię obliczymy najpierw biegunowy moment bezwładności  $J_o$ , obierając jako pole elementarne  $dA$  pole pierścienia o promieniu  $\rho$  i grubości  $d\rho$ :  
 $dA = 2\pi\rho d\rho$

i podstawiamy do wzoru:

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \left[ \frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^4}{32}$$

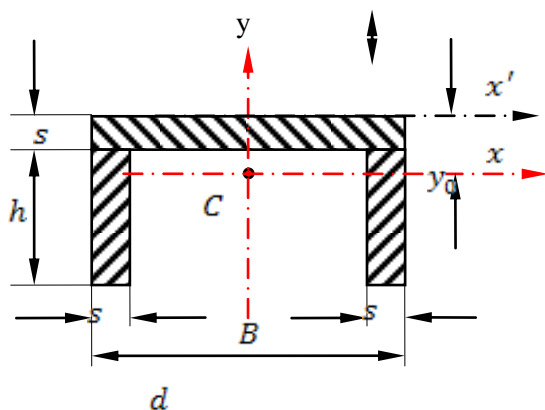
Dla wyznaczenia momentu bezwładności względem średnicy uwzględniamy, że moment bezwładności koła względem każdej średnicy jest jednakowy:

$$J_x = J_y = \frac{J_o}{2} = \frac{\pi d^4}{64}$$

Rys.19

### Przykład

Obliczyć główne centralne momenty bezwładności przekroju ceownika symetrycznego. Wymiary wynoszą:  $B = 60 \text{ mm}$ ,  $h = 30 \text{ mm}$ ,  $s = 10 \text{ mm}$ .



Dzielimy figurę na części, których środki geometryczne możemy ściśle określić i podział ten zaznaczamy na rys. Wyznaczamy położenie środka geometrycznego  $C$ . Będzie on leżał na osi symetrii  $y$  w odległości  $y_0$  od osi  $x'$ , przyjętej jak na rys. :

$$y_0 = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{Bs \frac{s}{2} + 2hs(\frac{h}{2} + s)}{Bs + 2hs}$$

$$y_0 = \frac{6 \cdot 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2,5}{6 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1} = 1,5 \text{ cm}$$

Rys.20

Znając położenie środka geometrycznego obliczamy główne centralne momenty bezwładności wykorzystując twierdzenie Steinera:



$$I_x = \frac{Bs^3}{12} + Bs\left(y_0 - \frac{s}{2}\right)^2 + 2\left[\frac{sh^3}{12} + sh\left(\frac{h}{2} + s - y_0\right)^2\right]$$

$$I_x = \frac{6 \cdot 1^3}{12} + 6 \cdot 1 \cdot 1^2 + 2\left[\frac{1 \cdot 3^3}{12} + 3 \cdot 3 \cdot 1^2\right] = 17 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{sB^3}{12} + 2\left[\frac{hs^3}{12} + hs\left(\frac{B}{2} + \frac{s}{2}\right)^2\right]$$

$$I_y = \frac{1 \cdot 6^3}{12} + 2\left[\frac{3 \cdot 1^3}{12} + 3 \cdot 1 \cdot 2,5^2\right] = 56 \text{ cm}^4$$

Odp.

$$I_x = 17 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$I_y = 56 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$



## Temat 6 (2 godziny):

### *Skrećanie przekrojów osiowo symetrycznych i prostokątnych. Obliczenia wałów pędnych*

Skrećanie zachodzi wtedy, gdy siły zewnętrzne działające na elementy konstrukcyjne sprowadzają się do par leżących na osi geometrycznej tych elementów. Z warunku równowagi odciętej przekrojem myślowym części elementu skrećanego wynika, że siły wewnętrzne sprowadzają się do pary sił, działających w płaszczyźnie tego przekroju. Moment tej pary zwany momentem skrećającym  $M_s$  w danym przekroju, jest równy sumie algebraicznej momentów zewnętrznych, działających na element skrećany po jednej stronie rozpatrywanego przekroju. Przez analogię do osiowego rozciągania wektory momentów skrećających w danym przekroju są dodatnie, jeśli ich wektory skierowane są na zewnątrz przekroju.

*Obliczenia wałów pędnych.*

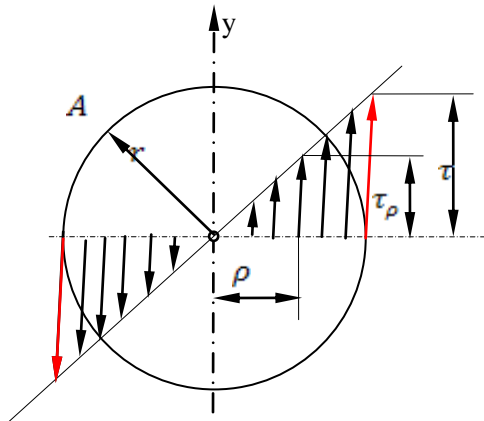
W poszczególnych punktach przekrojów poprzecznych wału okrągłego występują naprężenia styczne, prostopadłe do promienia i do niego wprost proporcjonalne:

$$\tau_\rho = \frac{M_s}{J_0} \rho$$

gdzie:  $\tau_\rho$  - naprężenie styczne w punktach odległych o  $\rho$  od środka przekroju,

$M_s$  - moment skrećający w danym przekroju,

$J_0$  - biegunowy moment bezwładności przekroju wału względem środka koła.



Rys.22 Rozkład naprężeń tnących w przekroju poprzecznym okrągłego pręta skręcanego.

Rozkład naprężeń stycznych w przekroju poprzecznym wału przedstawiono na rys.22. Największe naprężenia styczne w danym przekroju występują we włóknach skrajnych dla  $\rho = r$ :

$$\tau = \frac{M_s}{J_0} r = \frac{M_s}{W_0}$$

gdzie:

$$W_0 = \frac{J_0}{r}$$

jest wskaźnikiem wytrzymałości na skręcanie, a jego podstawową jednostką w układzie SI jest  $m^3$ . Podstawowy warunek wytrzymałościowy na skręcanie przyjmuje postać:

$$\tau_{max} = \frac{M_s}{W_0} \leq k_s$$

gdzie:  $k_s$  - jest naprężeniem dopuszczalnym na skręcanie.

Przy skręcaniu poszczególne przekroje poprzeczne wału obracają się względem siebie o kąt  $\varphi$ , zwany kątem skręcenia, proporcjonalny do odległości tych przekrojów  $l$  a odwrotnie proporcjonalny do sztywności przekroju na skręcanie  $GJ_0$ :

$$\varphi = \frac{M_s l}{GJ_0} [rad] \quad \text{lub} \quad \varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \frac{M_s l}{GJ_0} [^\circ]$$

Jeżeli wał składa się z kilku odcinków o różnych sztywnościach przekroju na skręcanie lub o różnych momentach skręcających, to całkowity kąt skręcenia równy jest sumie algebraicznej kątów skręcenia poszczególnych odcinków o stałym  $M_s$  i  $GJ_0$ . Często, szczególnie w maszynach precyzyjnych ograniczone są nie tylko maksymalne naprężenia, lecz także kąt skręcenia:

$$\varphi_{max} \leq \varphi_{dop}$$

przy czym dopuszczalny kąt skręcenia podawany jest przeważnie w stopniach na 1 m długości wału. W budowie maszyn  $\varphi_{dop} = \frac{1}{4} \left[ \frac{^\circ}{m} \right]$ . Skręcanie występuje w budowie maszyn przeważnie w elementach przenoszących moc w ruchu obrotowym. Najczęściej podawane są przenoszone moce  $N [kW]$  oraz obroty wału  $n \left[ \frac{obr}{min} \right]$ . Mając te dane możemy obliczyć przyłożone momenty obrotowe  $M [Nm]$  z zależności:

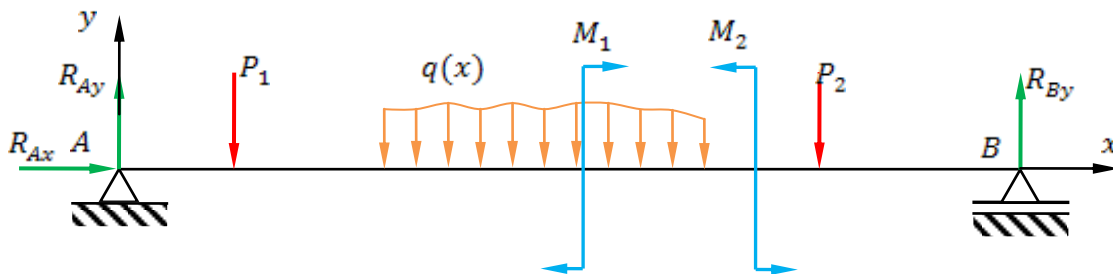
$$M = 9550 \frac{N}{n}$$



## Temat 7 (2 godziny):

### Zginanie, wykresy sił tnących i momentów gnących

Zginaniem nazywamy stan naprężenia i odkształcenia wywołany siłami zewnętrznymi, prostymi do osi geometrycznej elementu konstrukcyjnego oraz zewnętrznymi parami sił, leżących w płaszczyźnie przechodzącej przez tę oś geometryczną. Elementy zginane nazywamy w wytrzymałości materiałów belkami. Ogólny przypadek obciążeń powodujących zginanie przedstawiony jest na rys.25, na przykładzie belki na dwóch podporach. Pierwszym punktem rozwiązania belki jest obliczenie reakcji podpór, z równań równowagi statyki. Równanie dobieramy tak, aby otrzymać układ rozprężony, to znaczy, aby w każdym równaniu występowała tylko jedna niewiadoma reakcja. Dla belki na dwóch podporach uzyskamy to, układając równania równowagi w postaci sum momentów względem jednej z podpór, a dla belki wspornikowej w postaci sumy rzutów sił na prosta prostą do osi belki i sumy momentów względem punktu utwierdzenia.



Rys.25 Ogólny przypadek obciążeń powodujących zginanie.

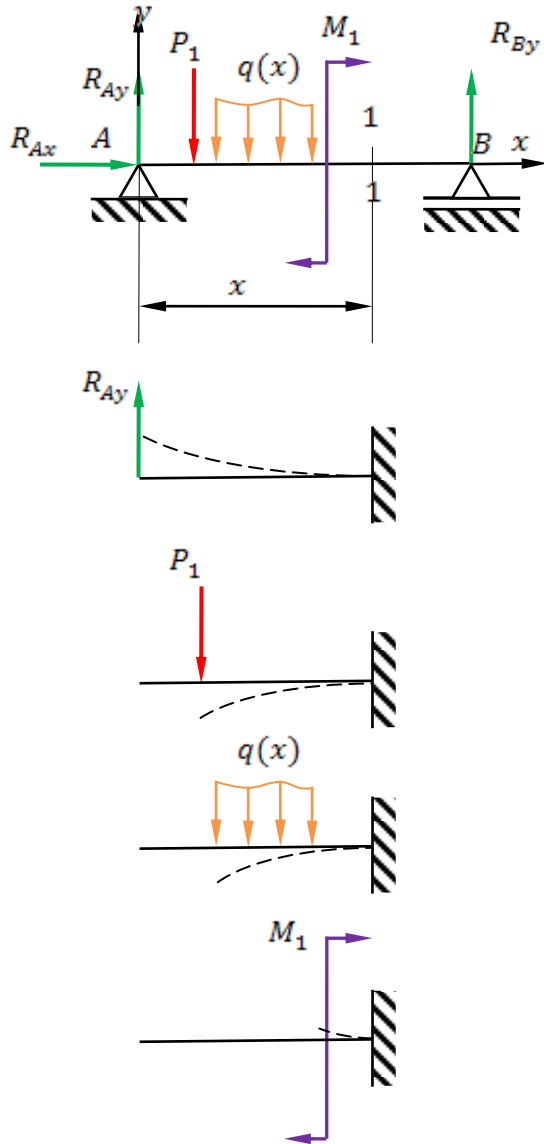
Siły wewnętrzne w belkach. Siła tnąca i moment zginający.

W ogólnym przypadku zgięcia płaskiego siły wewnętrzne w przekroju poprzecznym belki sprowadzają się do siły leżącej w płaszczyźnie tego przekroju, oraz do pary sił, której wektor również leży w płaszczyźnie przekroju poprzecznego belki. Siłę tnącą i moment zginający  $M$ , w danym przekroju poprzecznym belki wyznaczamy metodą myślowych przekrojów. Siła tnąca  $T$ , w danym przekroju poprzecznym belki, jest równa sumie algebraicznej wszystkich sił prostych do osi belki leżących po jednej stronie rozpatrywanego przekroju. Jeżeli rozpatrujemy część belki leżącą po lewej stronie wybranego przekroju, to wszystkie siły zewnętrzne działające na tę część skierowane do góry wchodzi do wyrażenia na siłę tnącą ze znakiem plus, a skierowane w dół ze znakiem minus. W przypadku rozpatrywania prawej





części belki umowa ulega odwróceniu. Moment zginający  $M_g(x)$  w danym przekroju poprzecznym belki jest równy sumie algebraicznej momentów wszystkich sił zewnętrznych działających po jednej stronie rozpatrywanego przekroju, względem środka geometrycznego tego przekroju.



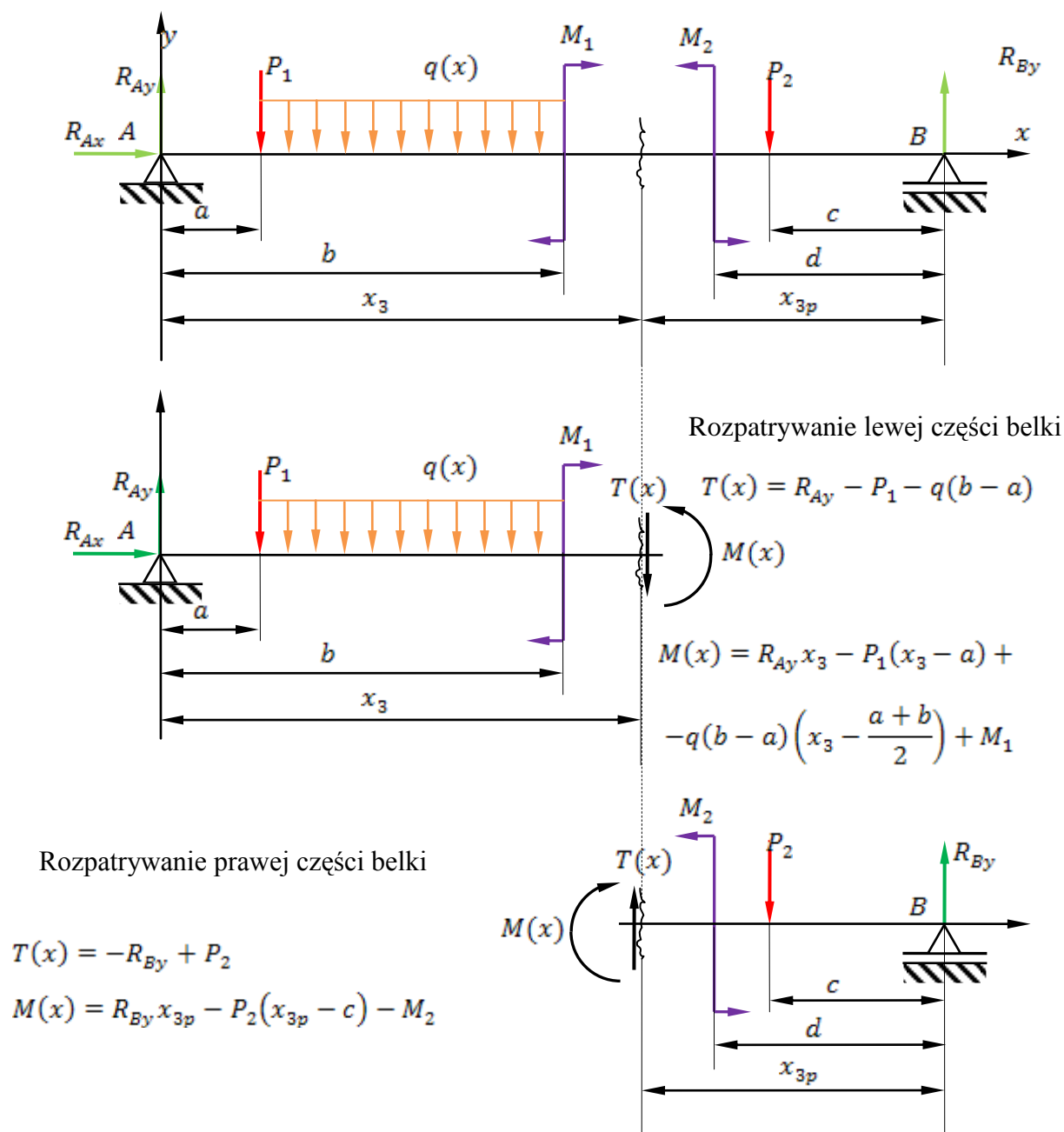
Moment zginający uważamy za dodatni, jeżeli wygina belkę wypukłością w dół (wywołuje rozciąganie dolnych włókien, a ścisnienie górnych). Celem rozstrzygnięcia, jak dany moment siły zewnętrznej wygina belkę, czyli z jakim znakiem wejdzie on do sumy momentów działających po jednej stronie rozpatrywanego przekroju postępujemy następująco: odrzucamy podpory, a rozpatrywaną część belki mocujemy sztywno w tym przekroju, otrzymując belkę wspornikową. Belkę obciążamy siłą, której moment chcemy ustalić. Siła  $R_{Ay}$  wygina rozpatrywaną belkę wypukłością do dołu, a więc jej moment wejdzie do wyrażenia na moment gnący w przekroju  $1-1$  ze znakiem plus.

Moment od siły  $P_1$  wejdzie do wyrażenia na moment gnący w przekroju  $1-1$  ze znakiem minus.

Moment od obciążenia ciągłego  $q(x)$  wejdzie do wyrażenia na moment gnący w przekroju  $1-1$  ze znakiem minus.

Moment od momentu skupionego  $M_1$  wejdzie do wyrażenia na moment gnący w przekroju  $1-1$  ze znakiem minus.

Rys.26 Umowa co do znaków momentów zginających.



Rys.27 Wyznaczanie sił wewnętrznych w myślowych przekrojach.

Dla określenia maksymalnych wartości sił tnących i momentów zginających oraz przekrojów, w których one występują, przedstawiamy je graficznie jako funkcje zmiennej niezależnej  $x$ , sporządzając wykresy sił poprzecznych (tnących) i momentów zginających. Wykresy te rysujemy pod schematem rozwiązywanej belki z zachowaniem skali długości i skali sił. Przy rysowaniu i sprawdzaniu prawidłowości wykonania wykresów bardzo pomocne są zależności



różniczkowe, wiążące ze sobą moment zginający, siłę tnącą i natężenie obciążenia w danym przekroju belki:

$$\frac{dT(x)}{dx} = -q(x)$$

$$\frac{dM_g(x)}{dx} = T(x)$$

a stąd:

$$\frac{d^2M_g(x)}{dx^2} = -q(x)$$

Z powyższych zależności wynika, że natężenie obciążenia ciągłego  $q(x)$ , ze znakiem minus, jest pochodną funkcji siły poprzecznej  $T(x)$ , a funkcja siły poprzecznej  $T(x)$ , jest pochodną funkcji momentu gnącego  $M_g(x)$  względem zmiennej  $x$ . Natężenie obciążenia ciągłego  $q(x)$  skierowane w dół uważamy za dodatnie, a w górę za ujemne. Z matematycznej analizy wiadomo, że jeżeli pochodna jest dodatnia to funkcja jest rosnąca, jeżeli jest równa zero, to funkcja jest stała, jeśli jest ujemna to funkcja jest malejąca.

Wynika stąd, że na odcinkach belki, na których nie ma obciążenia ciągłego, siła tnąca jest funkcją stałą. Wykres tej siły jest linią prostą równoległą do osi odciętych. Moment zginający jest funkcją pierwszego stopnia (liniowa), przy czym w przedziałach gdzie siła tnąca jest dodatnia funkcja momentu jest rosnąca, a gdzie ujemna – malejąca. Na odcinkach belki z obciążeniem ciągłym rozłożonym równomiernie ( $q(x) = \text{const}$ ), siła tnąca jest funkcją pierwszego stopnia (liniowa), a moment zginający funkcją drugiego stopnia (parabola). W przekroju, w którym siła tnąca zmienia znak przechodząc przez zero, moment zginający osiąga ekstremum lokalne.