



15.	Przedmiot:	WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW									
Kierunek: Mechatronika											
Specjalność: mechatronika systemów energetycznych											
Rozkład zajęć w czasie studiów											
Semestr	Liczba tygodni w semestrze	Liczba godzin w tygodniu				Liczba godzin w semestrze				Punkty kredytowe	
		A	Ć	L	S	Σ	A	Ć	L		S
III	15	1	1	–	–	30	15	15	–	–	3
IV	15	1E	1	2	–	60	15	15	30	–	4
Razem w czasie studiów						90	30	30	30	–	7

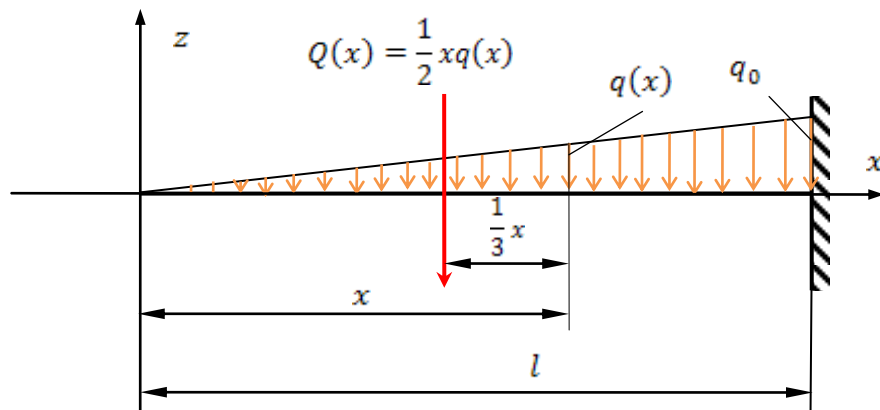
Semestr IV						
8.	Zależności różniczkowe przy zginaniu.	4	2	2	–	–
9.	Ścinanie ze zginaniem, wzór Żurawskiego.	2	1	1	–	–
10.	Obliczenia belek , wymiarowanie ze względu na naprężenia dopuszczalne.	4	2	2	–	–
11.	Odkształcenia belek podczas czystego zginania. Całkowanie równania różniczkowego.	4	2	2	–	–
12.	Metoda Clebsch'a całkowania równania różniczkowego osi odkształconej belki.	4	2	2	–	–
13.	Wyboczenie , siła krytyczna, smukłość prętów, wzory Eulera i Tetmayera.	4	2	2	–	–
14.	Belki statycznie niewyznaczalne , wyznaczanie reakcji metodą całkowania równania różniczkowego i porównywania odkształceń.	4	2	2	–	–
15.	Hipotezy wytrzymałościowe Hubera, Coulomba, De Saint Venanta, Galileusza , złożone przypadki wytrzymałości, <i>skręcanie ze zginaniem, ściskanie mimośrodowe.</i>	4	2	2	–	–

Temat 8 (2 godziny):

Zależności różniczkowe przy zginaniu.

Zadanie 8.1

Obliczyć reakcje, wykonać wykresy sił tnących i momentów zginających dla belki jednostronnie utwierdzonej, obciążonej ciężarem ciągłym, rozłożonym wg trójkąta o maksymalnej wartości obciążenia równej q_0 , jak na rys.8.1.



Rys.8.1 Schemat obciążenia belki

Z trójkątów podobnych układamy równanie:

$$\frac{q(x)}{x} = \frac{q_0}{l}$$

stąd wyznaczmy $q(x)$:

$$q(x) = \frac{q_0}{l} x$$

Równanie sił tnących wyznaczamy jako całkę z obciążenia ciągłego:

$$T(x) = \int -q(x) dx = \int -\frac{q_0}{l} x dx = -\frac{q_0 x^2}{2l} + C = -\frac{q_0 x^2}{2l}$$

gdzie C jest stałą całkowania, wyznaczaną z warunku brzegowego dla $x = 0$ $T = 0$ czyli $C = 0$.
Znak minus wynika ze zwrotu w dół obciążenia ciągłego.

Wykres sił tnących przedstawiony jest na rys.8.2. Jest to parabola drugiego stopnia przechodząca przez dwa punkty: $T(0) = 0$ i $T(l) = -\frac{q_0 l}{2}$

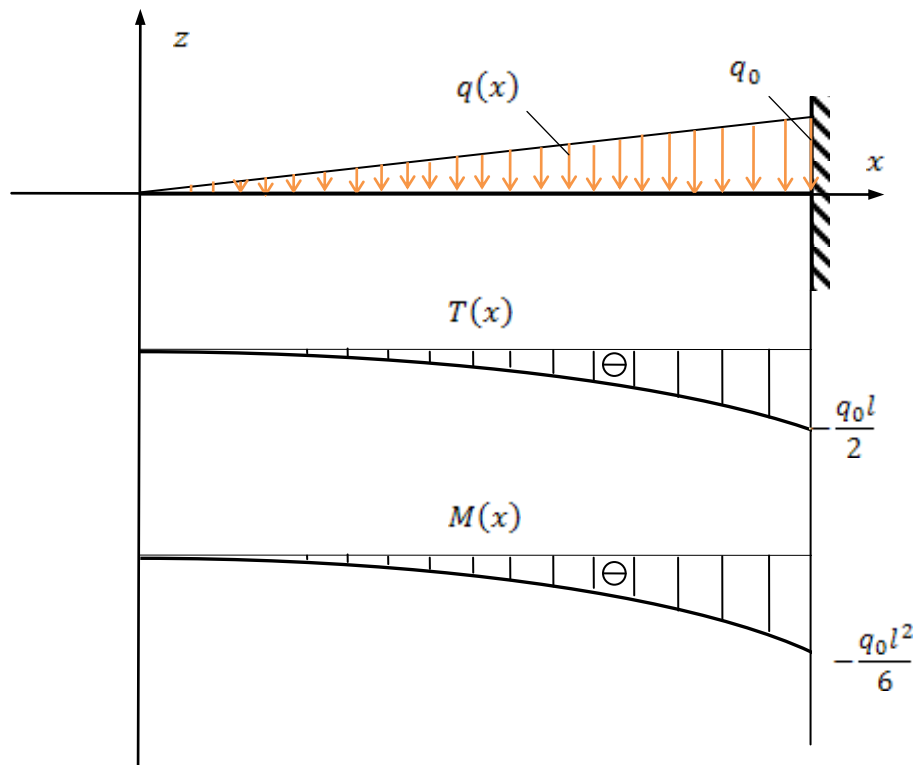
Równanie momentów zginających wyznaczamy jako całkę z równania sił tnących:

$$M(x) = \int T(x) dx = \int -\frac{q_0 x^2}{2l} dx = -\frac{q_0 x^3}{3 \cdot 2l} + D = -\frac{q_0 x^3}{6l}$$

gdzie D jest stałą całkowania, wyznaczaną z warunku brzegowego dla $x = 0$ $M = 0$ czyli $D = 0$.



Wykres momentów zginających przedstawiony jest na rys.8.2 Jest to parabola trzeciego stopnia przechodząca przez dwa punkty: $M(0) = 0$ i $M(l) = -\frac{q_0 l^2}{6}$



Rys.8.2 Wykresy sił tnących i momentów zginających

Identyczne wyniki otrzymuje się metodą myślowych przekrojów.

Siła tnąca w przekroju określonym współrzędną x równa jest polu trójkąta o podstawie x i wysokości $q(x)$:

$$T(x) = -\frac{1}{2} x q(x) = -\frac{1}{2} x \frac{q_0}{l} x = -\frac{q_0 x^2}{2l}$$

Moment zginający w przekroju określonym współrzędną x równy jest iloczynowi siły $Q(x)$ i ramienia jej działania, które wynosi $\frac{1}{3} x$ (środek ciężkości trójkąta):

$$M(x) = Q(x) \frac{1}{3} x = -\frac{q_0 x^2}{2l} \frac{1}{3} x = -\frac{q_0 x^3}{6l}$$

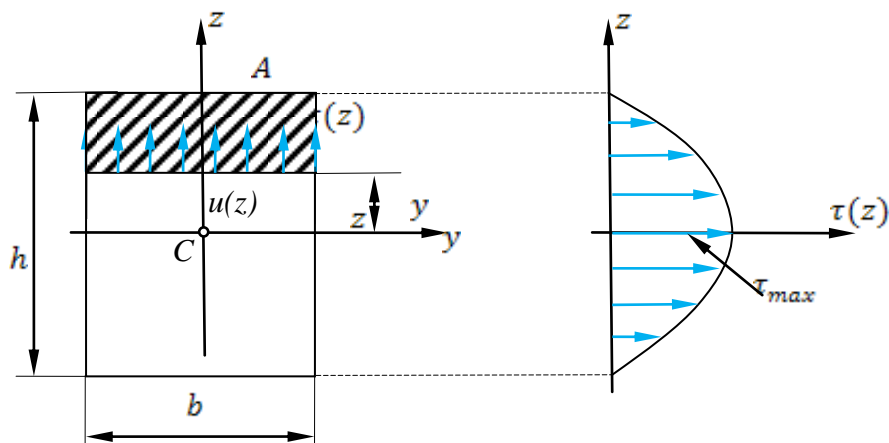


Temat 9 (1 godzina):

Ścinanie ze zginaniem, wzór Żurawskiego

Zadanie 9.1

Wyznaczyć rozkład składowych pionowych naprężeń stycznych wzdłuż osi pionowej z dla przekroju prostokąta o wymiarach $b \times h$ oraz wyznaczyć wartość naprężeń maksymalnych.



Rys.9.1 Rozkład naprężeń tnących od siły poprzecznej w przecie o przekroju prostokątnym

Średnie naprężenia styczne $\tau(z)$ w warstwie odległej o z od osi obojętnej y wyznaczamy z wzoru Żurawskiego:

$$\tau(z) = \frac{T(x) \cdot S_y(z)}{J_y \cdot u(z)}$$

W rozpatrywanym przypadku otrzymamy:

$$S_y(z) = \frac{bh}{2} \cdot \frac{h}{4} - bz \frac{z}{2} = \frac{b}{2} \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right)$$

$$J_y = \frac{bh^3}{12} \quad u = b$$

Podstawiając te dane do wzoru Żurawskiego otrzymamy:



$$\tau(z) = \frac{T(x) \cdot \frac{b}{2} \left(\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right)}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} = \frac{T(x) \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{h^2}{4} \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right)}{\frac{bh^3}{12} \cdot b}$$

a po uproszczeniach:

$$\tau(z) = \frac{3}{2} \cdot \frac{T(x)}{bh} \cdot \left(1 - 4 \frac{z^2}{h^2} \right)$$

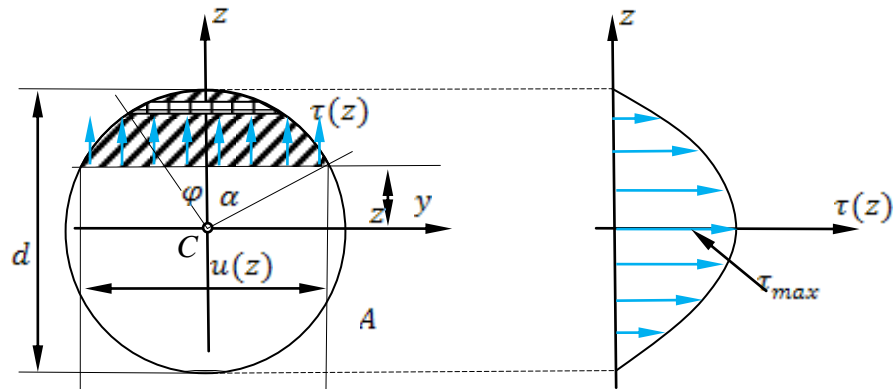
Jak widzimy, wartość naprężenia stycznego zmienia się parabolicznie osiąga wartość maksymalną w warstwie obojętnej wynoszącą:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T(x)}{bh} = \frac{3}{2} \cdot \tau_{sred}$$

Maksymalna wartość składowej pionowej naprężenia stycznego dla przekroju prostokątnego 1,5 razy większa od wartości średniej τ_{sred} tego naprężenia liczonego dla całego przekroju.

Zadanie 9.2

Wyznaczyć rozkład składowych pionowych naprężeń stycznych wzdłuż osi pionowej z dla przekroju kołowego o średnicy d oraz wyznaczyć wartość naprężeń maksymalnych.



Rys.9.2 Rozkład składowych pionowych naprężeń tnących od siły poprzecznej w pręcie o przekroju kołowym

Średnie składowe pionowe naprężeń stycznych $\tau(z)$ w warstwie odległej o z od osi obojętnej y wyznaczamy ze wzoru Żurawskiego:



$$\tau(z) = \frac{T(x) \cdot S_y(z)}{J_y \cdot u(z)}$$

Długość $u(z)$ jest:

$$u(z) = 2r \sin \alpha$$

W celu obliczenia $S_y(z)$ to jest momentu statycznego pola znajdującego się nad warstwą o współrzędnej pionowej z względem osi y , dzielimy to pole na paski elementarne równoległe do osi y , przyjmując za zmienną niezależną kąt środkowy φ . Długość paska elementarnego, którego położenie określa kąt φ wyniesie:

$$u_\varphi = 2r \sin \varphi$$

jego odległość od osi zginania z :

$$z = r \cos \varphi$$

stąd grubość paska elementarnego dz :

$$dz = r \sin \varphi d\varphi$$

pole paska elementarnego dA :

$$dA = u_\varphi dz = 2r \sin \varphi r \sin \varphi d\varphi = 2r^2 \sin^2 \varphi d\varphi$$

ostatecznie $S_y(z)$:

$$S_y(z) = \int_A z dA = \int_0^\alpha r \cos \varphi 2r^2 \sin^2 \varphi d\varphi = 2r^3 \int_0^\alpha \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi$$

podstawiając: $x = \sin \varphi$ $dx = \cos \varphi d\varphi$ otrzymujemy:

$$S_y(z) = 2r^3 \int_0^\alpha x^2 dx = \frac{2}{3} r^3 \sin^3 \alpha$$

Wstawiając tak wyznaczoną wartość $S_y(z)$ do wzoru Żurawskiego i pamiętając, że dla przekroju kołowego $J_y = \frac{\pi r^4}{4}$ otrzymamy:

$$\tau(z) = \frac{T(x) \cdot S_y(z)}{J_y \cdot u(z)} = \tau(z) = \frac{T(x) \cdot \frac{2}{3} r^3 \sin^3 \alpha}{\frac{\pi r^4}{4} \cdot 2r \sin \alpha} = \frac{4}{3} \frac{T(x)}{\pi r^2} \sin^2 \alpha$$



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Widzimy, że średnia wartość składowych pionowych naprężenia stycznego dla przekroju kołowego zmienia się wzdłuż wysokości przekroju proporcjonalnie do kwadratu sinusa kąta α , osiągając wartość maksymalną w warstwie obojętnej dla kąta $\alpha = 90^\circ$ i wynosi:

$$\tau_{max} = \frac{4T(x)}{3\pi r^2} = \frac{4}{3}\tau_{ired}$$

Rozkład składowych pionowych naprężeń stycznych wzdłuż wysokości przekroju przedstawiono na rys.3.

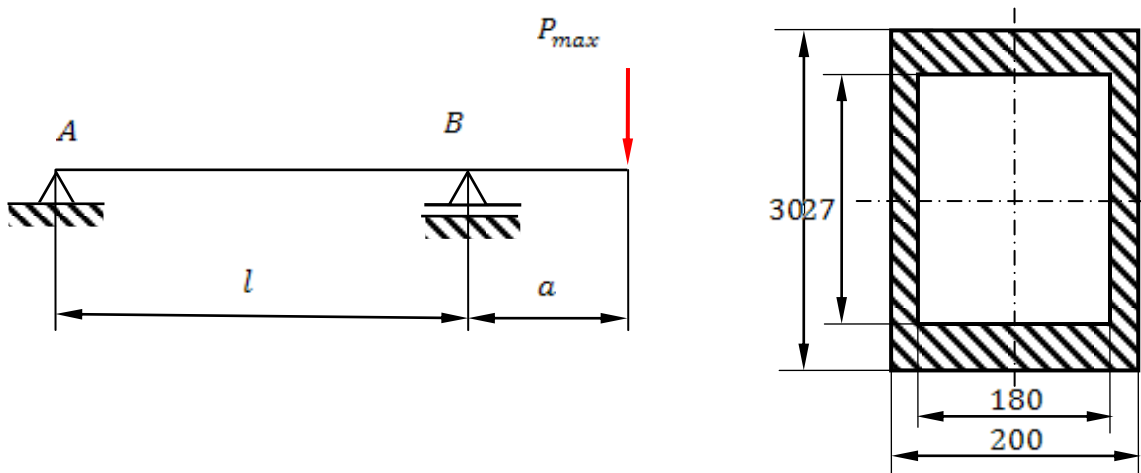


Temat 10 (2 godziny):

Obliczenia belek, wymiarowanie ze względu na naprężenia dopuszczalne

Zadanie 10.1

Obliczyć siłę maksymalną P_{max} dla belki przedstawionej na rys.10.1, jeżeli rozpiętość belki między podporami wynosi $l = 6\text{ m}$, długość wysięgnika wynosi $a = 2\text{ m}$. Belka wykonana jest ze stali dla której naprężenia dopuszczalne na zginanie wynoszą $k_g = 140\text{ MPa}$. Przekrój poprzeczny belki przedstawiony jest na rys.10.1 (prostokątna rura), wymiary podane są w mm.



Rys.10.1 Schemat obciążenia belki i wymiary przekroju poprzecznego

Największy co do wartości moment zginający M_{gmax} wystąpi nad podporą B , i wyniesie:

$$M_{gmax} = P_{max}a$$

Zgodnie z podstawowym warunkiem wytrzymałościowym, maksymalne naprężenia nie mogą przekroczyć naprężeń dopuszczalnych na zginanie k_g , czyli:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{gmax}}{W_g} \leq k_g$$

gdzie W_g jest wskaźnikiem wytrzymałości przekroju na zginanie.

Przekształcając powyższy wzór otrzymamy:

$$\frac{M_{gmax}}{W_g} \leq k_g \quad \frac{P_{max}a}{W_g} \leq k_g \quad P_{max} \leq \frac{k_g W_g}{a}$$



Osiowy moment bezwładności dla prostokąta o podstawie b i wysokości h wynosi $J = \frac{bh^3}{12}$. Zatem wskaźnik wytrzymałości przekroju na zginanie dla przekroju skrzynekowego będzie równy:

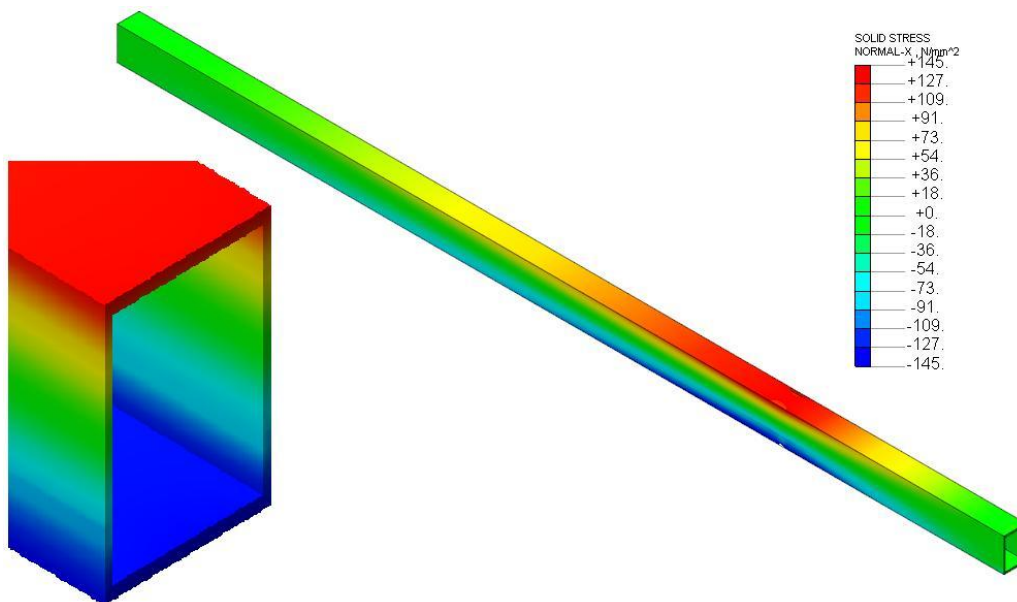
$$W_g = \frac{J}{h_{max}} = \left(\frac{200 \cdot 300^3}{12} - \frac{180 \cdot 270^3}{12} \right) \cdot \frac{1}{150} = \frac{1,5475 \cdot 10^8}{150} = 1,032 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$$

Zatem siła P_{max} wyniesie:

$$P_{max} \leq \frac{k_g W_g}{a} = \frac{140 \cdot 1,032 \cdot 10^6}{2000} = 72219 \text{ N} = 72,2 \text{ kN}$$

Odp. $P_{max} = 72,2 \text{ kN}$

Na rys. 10.2 Przedstawione są naprężenia dla całej belki i naprężenia w przekroju poprzecznym w powiększeniu nad podporą ruchomą B (rys.10.1).



Rys. 10.2 Naprężenia dla całej belki i w powiększeniu naprężenia w przekroju poprzecznym nad podporą ruchomą B (rys.10.1).

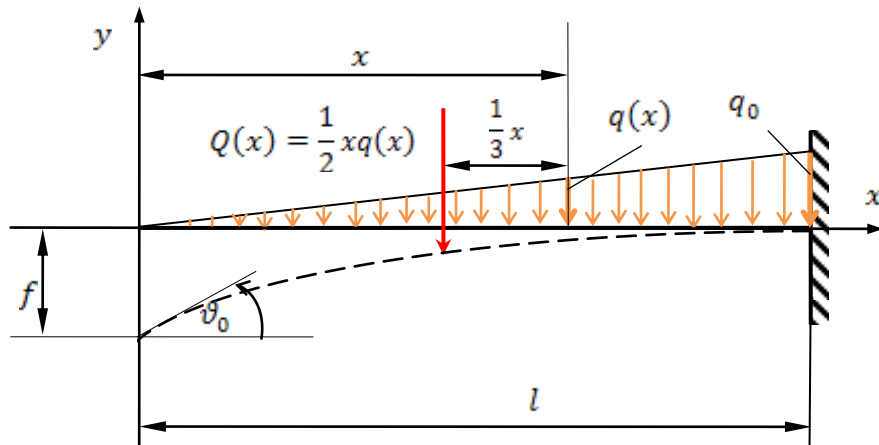
Temat 11 (2 godziny):

Odształcenia belek podczas czystego zginania. Całkowanie równania różniczkowego

Zadanie 11.1



Belka wspornikowa obciążona jest ciężarem ciągłym rozłożonym według trójkąta, jak na rys.11.1. Wyznaczyć równanie kątów ugięć i linii ugięcia belki oraz kąt ugięcia ϑ_0 na lewym końcu belki i strzałkę ugięcia f .



Rys.11.1 Schemat obciążenia belki

Początek układu osi obieramy na lewym końcu belki. Z trójkątów podobnych układamy równanie:

$$\frac{q(x)}{x} = \frac{q_0}{l}$$

stąd wyznaczmy $q(x)$:

$$q(x) = \frac{q_0}{l} x$$

Obciążenie skupione do siły $Q(x)$ w przekroju określonym współrzędną x równe jest polu trójkąta o podstawie x i wysokości $q(x)$:

$$Q(x) = -\frac{1}{2} x q(x) = -\frac{1}{2} x \frac{q_0}{l} x = -\frac{q_0 x^2}{2l}$$

Moment zginający w przekroju określonym współrzędną x równy jest iloczynowi siły skupionej $Q(x)$ i ramienia jej działania, które wynosi $\frac{1}{3} x$ (środek ciężkości trójkąta):

$$M(x) = Q(x) \frac{1}{3} x = -\frac{q_0 x^2}{2l} \frac{1}{3} x = -\frac{q_0 x^3}{6l}$$

Wstawiając wyrażenie na moment zginający do równania różniczkowego linii ugięcia belki, otrzymamy:



$$EJy'' = M(x) = -\frac{q_0x^3}{6l}$$

a po pierwszym scałkowaniu:

$$EJy' = -\frac{q_0x^4}{4 \cdot 6l} + C = -\frac{q_0x^4}{24l} + C$$

i po drugim scałkowaniu:

$$EJy = -\frac{q_0x^5}{5 \cdot 24l} + Cx + D = -\frac{q_0x^5}{120l} + Cx + D$$

Wyznaczamy stałe całkowania z warunków brzegowych:

$$1. x = l \text{ i } y' = 0 \rightarrow 0 = -\frac{q_0l^4}{24l} + C \rightarrow C = \frac{q_0l^3}{24}$$

$$2. x = l \text{ i } y = 0 \rightarrow 0 = -\frac{q_0l^5}{120l} + Cl + D = -\frac{q_0l^4}{120} + \frac{q_0l^4}{24}l + D = \frac{4q_0l^4}{120} + D \rightarrow D = -\frac{q_0l^4}{30}$$

Otrzymujemy równanie linii kątów ugięcia belki:

$$y' = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{q_0x^4}{4 \cdot 6l} + \frac{q_0l^3}{24} \right]$$

i równanie linii ugięcia belki:

$$y = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{q_0x^5}{5 \cdot 24l} + \frac{q_0l^3}{24}x - \frac{q_0l^4}{30} \right]$$

kąt ugięcia ϑ_0 na lewym końcu belki:

$$\vartheta_0 = y'(0) = \frac{1}{EJ} \left[\frac{q_0l^3}{24} \right] = \frac{q_0l^3}{24EJ}$$

strzałkę ugięcia f :

$$f = y(0) = \frac{1}{EJ} \left[-\frac{q_0l^4}{30} \right] = -\frac{q_0l^4}{30EJ}$$

Odp. $\vartheta_0 = \frac{q_0l^3}{24EJ}$ $f = -\frac{q_0l^4}{30EJ}$

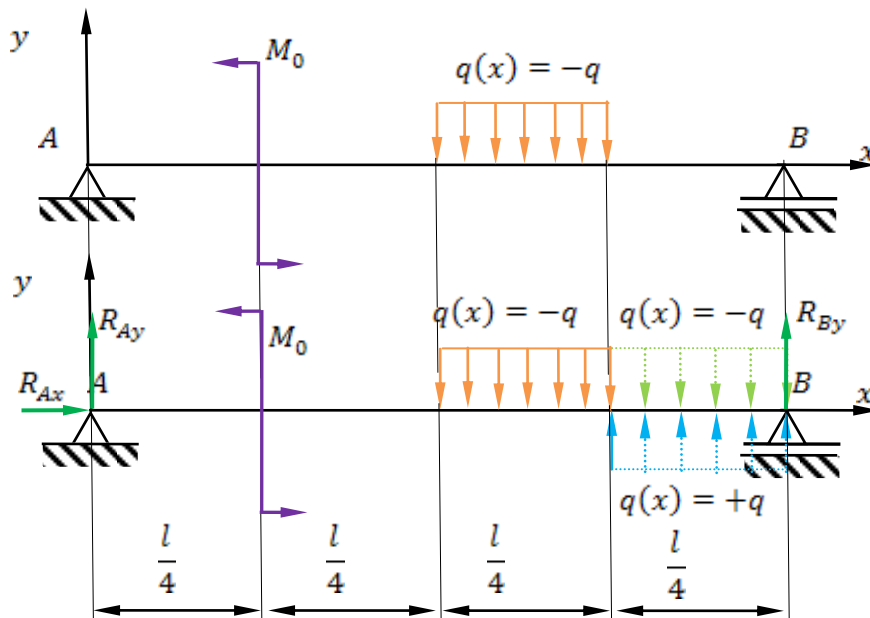


Temat 12 (2 godziny):

Metoda Clebsch'a całkowania równania różniczkowego osi odkształconej belki

Zadanie 12.1

Stosując metodę Clebscha wyznaczyć równanie kątów ugięć oraz linię ugięcia belki obciążonej momentem gnącym $M_0 = \frac{ql^2}{32}$ oraz ciężarem rozłożonym w sposób równomierny o stałym natężeniu q , jak na rys.3. Wyznaczyć dodatkowo kąt podporowy ϑ_A na podporze A oraz ugięcie belki $y\left(\frac{l}{2}\right)$ w środku.



Rys.12.1 Wprowadzenie dodatkowych obciążeń ciągłych w metodzie Clebscha.

Zgodnie z drugim warunkiem Clebscha w trzecim przedziale belki dodajemy i odejmujemy obciążenie ciągłe q jak na rys.3 i dla tak obciążonej belki wyznaczamy reakcje:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_0 - \frac{ql}{4} \frac{5}{8} l + R_B l = 0$$

$$\frac{ql^2}{32} - \frac{5ql^2}{32} + R_B l = 0 \rightarrow R_B = \frac{1ql}{8}$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow M_0 + \frac{ql}{4} \frac{3}{8} l - R_A l = 0$$

$$\frac{ql^2}{32} + \frac{5ql^2}{32} - R_A l = 0 \rightarrow R_A = \frac{3ql}{16}$$



Tab.1 Obliczanie linii ugięcia belki pokazanej na rys.3

$EJy'' =$	$R_A x$	$+M_0(x - \frac{l}{4})^0$	$-\frac{q(x - \frac{l}{2})^2}{2}$	$+\frac{q(x - \frac{3l}{4})^2}{2}$
$EJy' =$	$R_A \frac{x^2}{2} + C$	$+M_0(x - \frac{l}{4})$	$-\frac{q(x - \frac{l}{2})^3}{6}$	$+\frac{q(x - \frac{3l}{4})^3}{6}$
$EJy =$	$R_A \frac{x^3}{6} + Cx + D$	$+M_0 \frac{(x - \frac{l}{4})^2}{2}$	$-\frac{q(x - \frac{l}{2})^4}{24}$	$+\frac{q(x - \frac{3l}{4})^4}{24}$
$0 \leq x_1 \leq \frac{l}{4}$				
		$\frac{l}{4} \leq x_2 \leq \frac{l}{2}$		
			$\frac{l}{2} \leq x_3 \leq \frac{3l}{4}$	
				$\frac{3l}{4} \leq x_4 \leq l$

Równania linii ugięcia belki pokazanej na rys.3 z zastosowaniem metody Clebscha podano w tab.1. Warunki brzegowe:

1. $x = 0 \quad y = 0 \rightarrow D = 0$

2. $x = l \quad y = 0 \rightarrow 0 = R_A \frac{l^3}{6} + Cl + M_0 \frac{(l - \frac{l}{4})^2}{2} - \frac{q(l - \frac{l}{2})^4}{24} + \frac{q(l - \frac{3l}{4})^4}{24}$

$$0 = \frac{3ql^4}{16 \cdot 6} + Cl + \frac{ql^2 (l - \frac{l}{4})^2}{32 \cdot 2} - \frac{q(l - \frac{l}{2})^4}{24} + \frac{q(l - \frac{3l}{4})^4}{24}$$

$$0 = \frac{3ql^4}{16 \cdot 6} + Cl + \frac{ql^2 (\frac{3l}{4})^2}{32 \cdot 2} - \frac{q(\frac{l}{2})^4}{24} + \frac{q(\frac{1l}{4})^4}{24}$$

$$0 = \frac{3ql^3}{96} + C + \frac{9ql^3}{32 \cdot 32} - \frac{ql^3}{24 \cdot 16} + \frac{ql^3}{24 \cdot 16 \cdot 16}$$



$$0 = \frac{3ql^3 \cdot 64}{96 \cdot 64} + C + \frac{9ql^3 \cdot 6}{32 \cdot 32 \cdot 6} - \frac{ql^3 \cdot 16}{24 \cdot 16 \cdot 16} + \frac{ql^3}{24 \cdot 16 \cdot 16}$$
$$C = \frac{(-3 \cdot 64 - 9 \cdot 6 + 16 - 1)ql^3}{6144} = \frac{(-192 - 54 + 16 - 1)ql^3}{6144} = \frac{-231ql^3}{6144}$$
$$C = -0,0376ql^3$$

Kąt ugięcia nad podporą A wyznaczmy z równania dla przedziału $0 \leq x_1 \leq \frac{l}{4}$:

$$\vartheta_A = \vartheta_{x=0} = \frac{C}{EJ} = \frac{-231ql^3}{6144EJ} = -0,0376 \frac{ql^3}{EJ}$$

Ugięcie w środku belki wyznaczmy z równania dla przedziału $\frac{l}{4} \leq x \leq \frac{l}{2}$:

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{EJ} \left[\frac{3ql}{16} \frac{l^3}{48} - \frac{231ql^3}{6144} \frac{l}{2} + \frac{ql^2}{32} \frac{\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4}\right)^2}{2} \right]$$

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{EJ} \left[\frac{3ql}{16} \frac{l^3}{48 \cdot 16} - \frac{231ql^3}{6144} \frac{l}{2} + \frac{ql^2}{32} \frac{l^2}{32 \cdot 12} \right]$$

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{ql^4}{12288EJ} [48 - 231 + 12] = \frac{-171ql^4}{12288EJ} = -0,0139 \frac{ql^4}{EJ}$$

Odp. $\vartheta_A = -0,0376 \frac{ql^3}{EJ}$ $y\left(\frac{l}{2}\right) = -0,0139 \frac{ql^4}{EJ}$

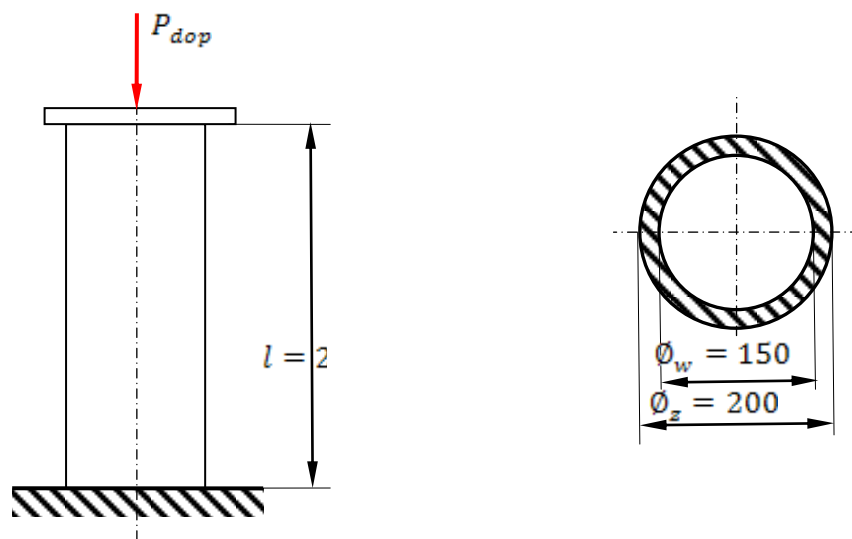


Temat 13 (2 godziny):

Wyboczenie, siła krytyczna, smukłość prętów, wzory Eulera i Tetmayera

Zadanie 13.1

Obliczyć dopuszczalną wartość siły ściskającej osiowo P_{dop} dla słupa wykonanego ze stali o $R_H = 200 \text{ MPa}$ i $R_c = 240 \text{ MPa}$, przy współczynniku bezpieczeństwa na wyboczenie $n_{wyb} = n_c = 2,5$. Przekrój poprzeczny słupa ma kształt pierścieniowy jak na rys.13.1.



Rys.13.1

Obliczamy smukłość λ :

$$\lambda = \frac{l_w}{i_{min}}$$

gdzie : $l_w = 2l = 4m = 4000 \text{ mm}$, długość wyboczeniowa dla pręta jednostronnie utwierdzonego,

i_{min} jest najmniejszym promieniem bezwładności przekroju pręta:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$$

J_{min} - minimalny osiowy moment bezwładności przekroju,

$$J_{min} = \frac{\pi D_z^4}{64} - \frac{\pi D_w^4}{64} = \frac{\pi}{64} [D_z^4 - D_w^4] = \frac{\pi}{64} [200^4 - 150^4] = 5,369 \cdot 10^7 \text{ mm}^4$$



A- pole przekroju poprzecznego,

$$A = \frac{\pi D_z^2}{4} - \frac{\pi D_w^2}{4} = \frac{\pi}{4} [D_z^2 - D_w^2] = \frac{\pi}{32} [200^2 - 150^2] = 1718 \text{ mm}^2$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{5,369 \cdot 10^7}{1718}} = 176,78 \text{ mm}$$

$$\lambda = \frac{l_w}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot l}{i_{\min}} = \frac{2 \cdot 2000}{176,78} = 22,63$$

Smukłość graniczna λ_{gr} :

$$\lambda_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{R_H}} = \pi \sqrt{\frac{2,1 \cdot 10^5}{200}} = 101,8$$

Ponieważ smukłość pręta $\lambda = 22,63$ jest mniejsza od smukłości granicznej $\lambda_{gr} = 101,8$ nie można stosować wzoru Eulera. Trzeba zastosować np. wzór Tetmajera-Jasińskiego:

$$\sigma_{kr} = a - b\lambda = 240 - 0,393 \cdot 22,63 = 231,1 \text{ MPa}$$

gdzie: $a = R_s = 240 \text{ MPa}$ granica plastyczności,

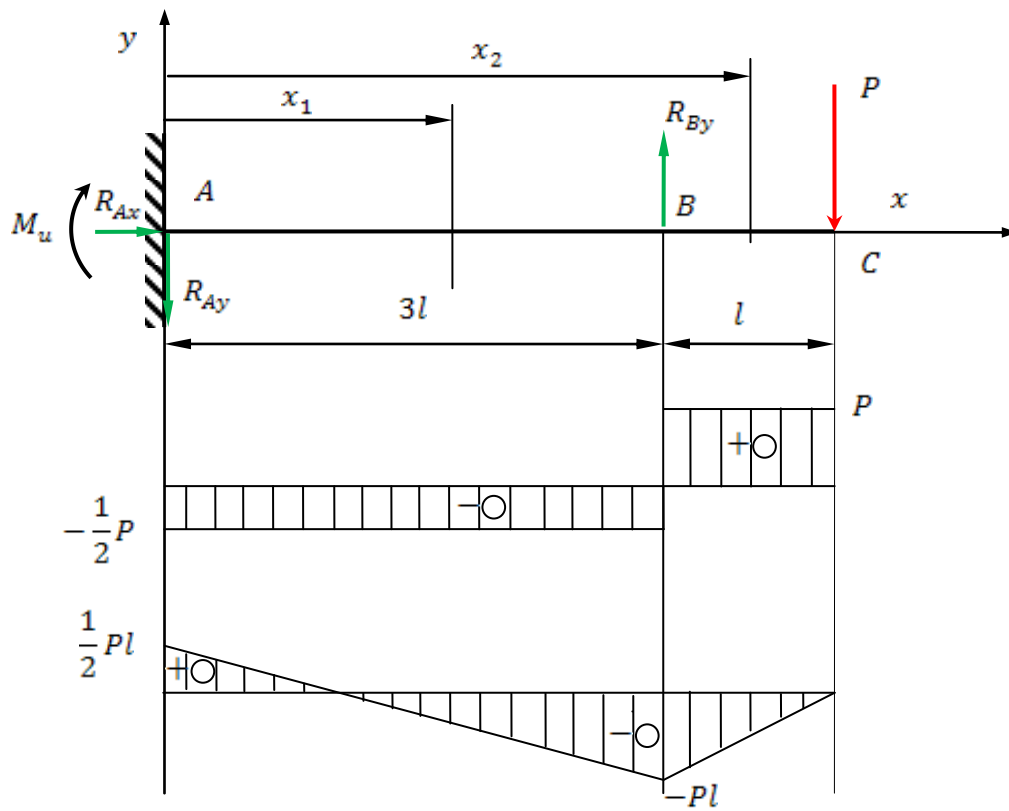
$$b = \frac{R_s - R_H}{\lambda_{gr}} = \frac{240 - 200}{101,8} = 0,393 \text{ współczynnik kierunkowy prostej Tetmajera-Jasińskiego}$$

Siła krytyczna P_{kr} wyniesie:

$$P_{kr} = \sigma_{kr} \cdot A = 231,1 \cdot 1718 = 397000 \text{ N} = 397 \text{ kN}$$

Siła dopuszczalna P_{dop} wyniesie:

$$P_{dop} = \frac{P_{kr}}{n_{wyb}} = \frac{397}{2,5} = 158,8 \text{ kN}$$



Rys.14.2 Wykresy sił tnących i momentów zginających.

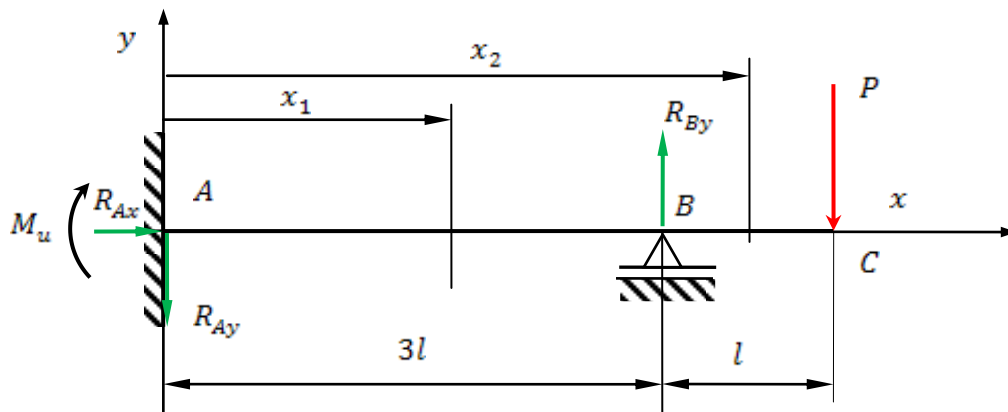


Temat 14 (2 godziny):

Belki statycznie niewyznaczalne, wyznaczanie reakcji metodą całkowania równania różniczkowego i porównywania odkształceń

Zadanie 14.1

Obliczyć reakcje, wykonać wykresy sił tnących i momentów zginających dla belki podpartej i obciążonej jak na rys.14.1 metodą całkowania równania różniczkowego linii ugięcia belki

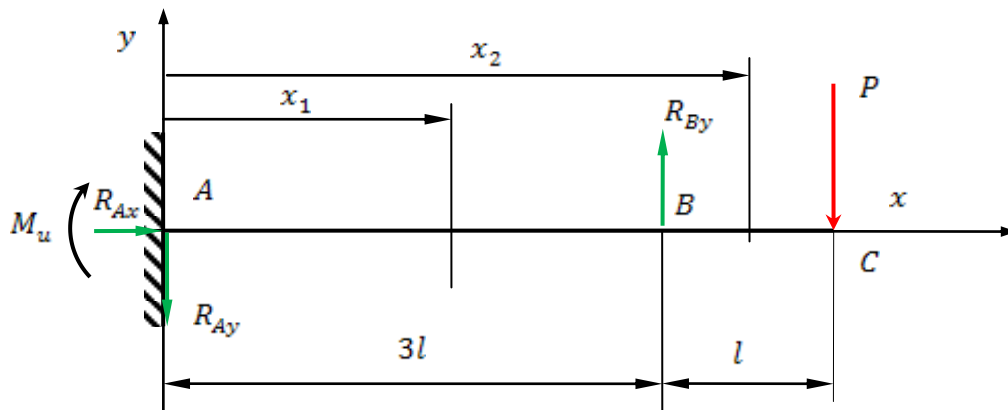


Rys.14.1 Schemat obciążenia belki rzeczywistej

Zapisujemy równania równowagi:

1. $\sum P_x = 0 \rightarrow R_{Ax} = 0$
2. $\sum P_y = 0 \rightarrow -R_{Ay} + R_{By} - P = 0$
3. $\sum M_A = 0 \rightarrow -M_u + R_{By} 3l - P 4l = 0$

Jako podporę hiperstatyczną przyjmujemy podporę B . Traktujemy reakcję hiperstatyczną R_{By} jako wiadomą, obliczamy reakcje belki podstawowej, przedstawionej na rys.14.2



Rys.14.2 Schemat obciążenia belki podstawowej.

$$2. \sum P_y = 0 \rightarrow -R_{Ay} + R_{By} - P = 0 \rightarrow R_{Ay} = R_{By} - P$$

$$3. \sum M_A = 0 \rightarrow -M_u + R_{By}3l - P4l = 0 \rightarrow M_u = R_{By}3l - P4l$$

Równania momentów gnących w pierwszym przedziale dla $0 \leq x_1 \leq 3l$:

$$M(x_1) = M_u - R_{Ay}x_1 = R_{By}3l - P4l - (R_{By} - P)x_1$$

Równania momentów gnących w drugim przedziale dla $3l \leq x_2 \leq 4l$:

$$M(x_2) = M_u - R_{Ay}x_2 + R_{By}(x_2 - 3l) = R_{By}3l - P4l - (R_{By} - P)x_2 + R_{By}(x_2 - 3l)$$

Dla ułatwienia rozwiązania korzystamy z zapisu w tabeli nr 14.1

Tab.14.1 Obliczanie linii ugięcia belki pokazanej na rys.14.2

$EJy'' =$	$R_{By}3l - P4l - (R_{By} - P)x$	$R_{By}(x - 3l)$
$EJy' =$	$(R_{By}3l - P4l)x - (R_{By} - P)\frac{x^2}{2} + C$	$R_{By}\frac{(x - 3l)^2}{2}$
$EJy =$	$(R_{By}3l - P4l)\frac{x^2}{2} - (R_{By} - P)\frac{x^3}{6} + Cx + D$	$R_{By}\frac{(x - 3l)^3}{6}$
$0 \leq x_1 \leq 3l$		$3l \leq x_2 \leq 4l$

Z warunków brzegowych wyznaczamy stałe całkowania C i D oraz reakcje hiperstatyczną R_{By} .



1. $x_1 = 0$ i $y = 0 \rightarrow 0 = D$
2. $x_1 = 0$ i $y' = 0 \rightarrow 0 = C$
3. $x_1 = 3l$ i $y = 0 \rightarrow 0 = (R_{By} 3l - P 4l) \frac{(3l)^2}{2} - (R_{By} - P) \frac{(3l)^3}{6}$

$$0 = (R_{By} 3 - P 4) \frac{9l^3}{2} - (R_{By} - P) \frac{27l^3}{6}$$

$$0 = (R_{By} 3 - P 4) - (R_{By} - P) = R_{By} 2 - P 3$$

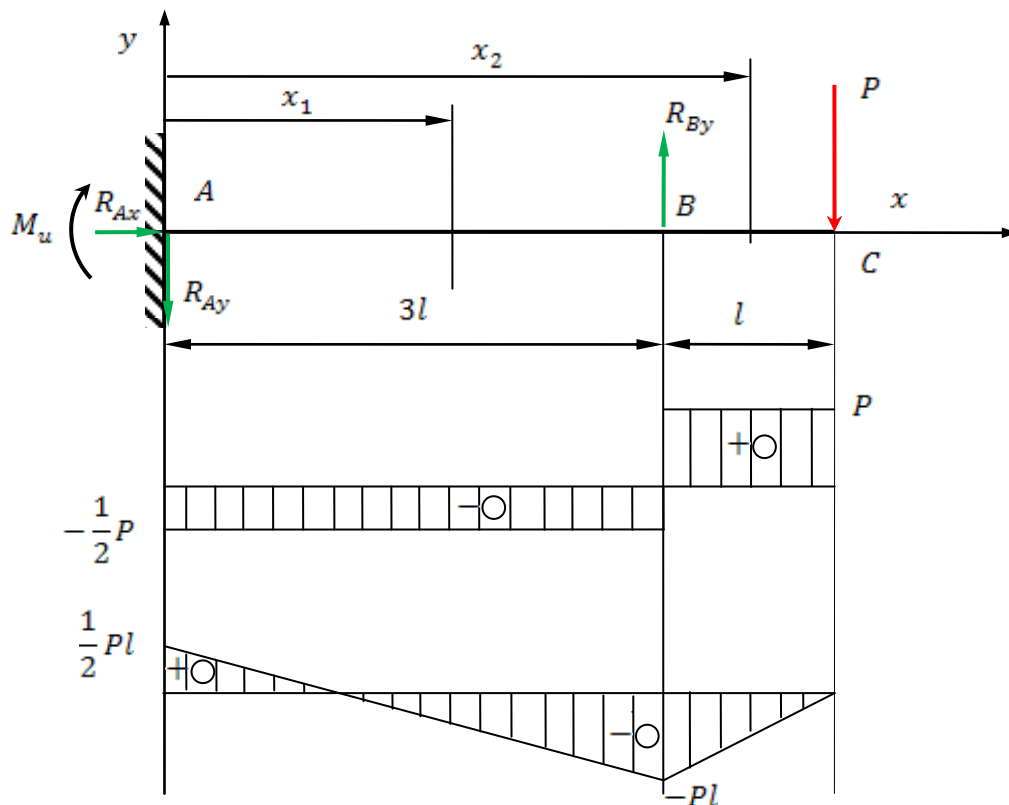
$$R_{By} = \frac{3}{2} P$$

Wyznaczamy pozostałe reakcje:

$$R_{Ay} = R_{By} - P = \frac{3}{2} P - P = \frac{1}{2} P$$

$$M_u = R_{By} 3l - P 4l = \frac{3}{2} P 3l - P 4l = \frac{1}{2} P l$$

Wykresy sił tnących i momentów zginających dla rozważanej belki przedstawione są na rys.14.3



Rys.14.2 Wykresy sił tnących i momentów zginających.

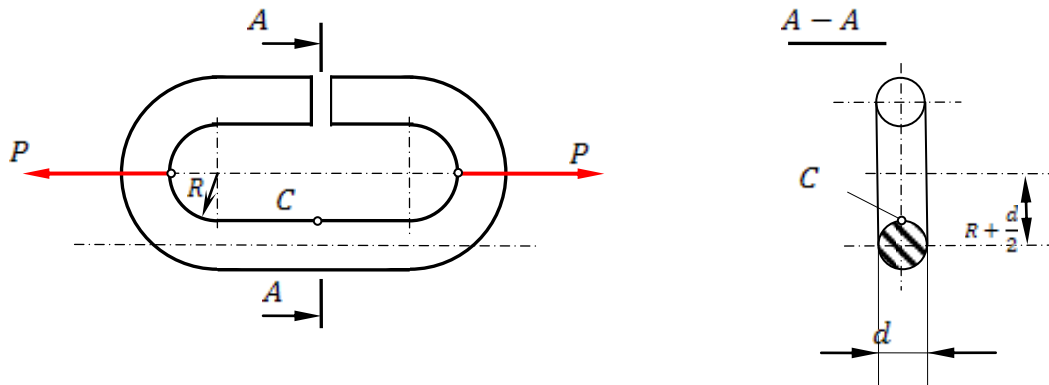


Temat 15 (2 godziny):

Hipotezy wytrzymałościowe Hubera, Coulomba, De Saint Venanta, Galileusza, złożone przypadki wytrzymałości, *skręcanie ze zginaniem, ściskanie mimośrodowe*

Zadanie 15.1

Rozcięte ogniwo łańcucha wykonano z pręta stalowego o średnicy $d = 50 \text{ mm}$. Wewnętrzny promień części zaokrąglonych $R = 50 \text{ mm}$. Wyznaczyć dopuszczalną wartość siły P , jaką można obciążyć ogniwo, jeżeli naprężenia dopuszczalne na rozciąganie $k_r = 120 \text{ MPa}$



Rys.15.1 Rozcięte ogniwo łańcucha, rozciągane siłami P .

Największe naprężenia wystąpią w nierozciętej prostoliniowej części ogniwa łańcucha wzdłuż górnej tworzącej (punkt C na rys 15.1). Jest to przypadek jednoczesnego rozciągania siłami M i zginania momentem $M = P(R + \frac{d}{2})$. Naprężenia od rozciągania σ_P wynoszą:

$$\sigma_P = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

Naprężenia od zginania σ_M wynoszą:

$$\sigma_M = \frac{M}{W_g} = \frac{32P(R + \frac{d}{2})}{\pi d^3}$$

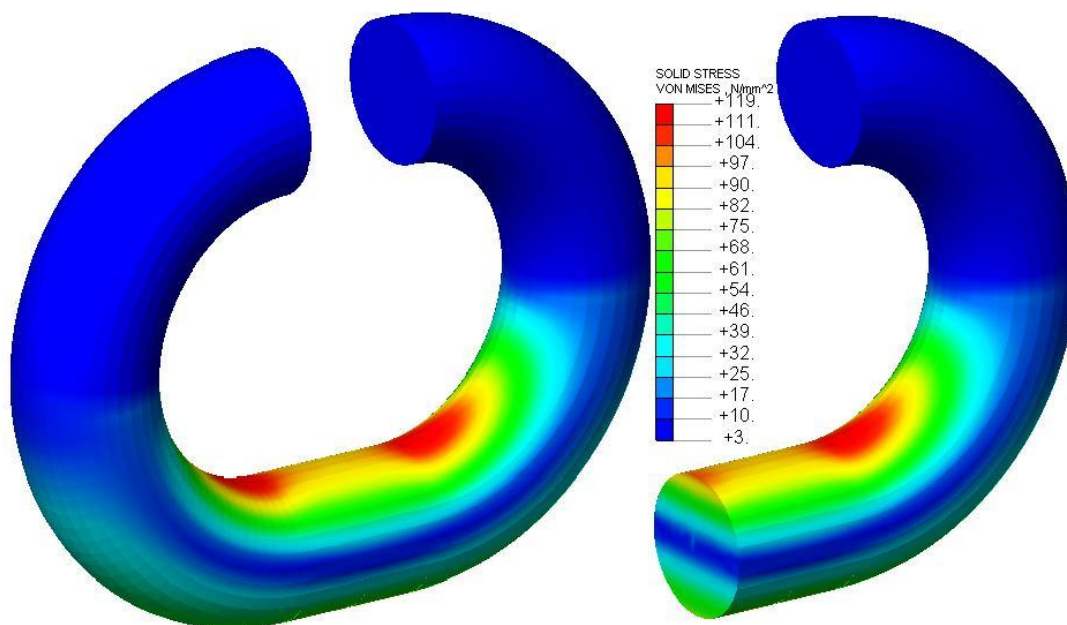
$$\sigma_{max} = \sigma_P + \sigma_M = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{32P(R + \frac{d}{2})}{\pi d^3} \leq k_r$$



$$P \left[\frac{4}{\pi d^2} + \frac{32(R + \frac{d}{2})}{\pi d^3} \right] \leq k_r \rightarrow P \leq \frac{k_r}{\frac{4}{\pi d^2} + \frac{32(R + \frac{d}{2})}{\pi d^3}}$$

$$P \leq \frac{k_r \pi d^3}{4d + 32(R + \frac{d}{2})} = \frac{120 \cdot \pi \cdot 50^3}{4 \cdot 50 + 32(50 + 25)} = \frac{4,712 \cdot 10^7}{2600} = 18123 \text{ N} = 18,1 \text{ kN}$$

Odp. $P \leq 18,1 \text{ kN}$



Rys.15.2 Naprężenia zredukowane wg hipotezy Misesa (Hubera) otrzymane za pomocą programu NASTRAN FX.