



15.	Przedmiot:	WYTRZYMAŁOŚĆ MATERIAŁÓW									
Kierunek: Mechatronika											
Specjalność: Elektroautomatyka okrętowa											
Rozkład zajęć w czasie studiów											
Semestr	Liczba tygodni w semestrze	Liczba godzin w tygodniu				Liczba godzin w semestrze				Punkty kredytowe	
		A	Ć	L	S	Σ	A	Ć	L		S
III	15	1	1	–	–	30	15	15	–	–	2
IV	15	1E	1	2	–	60	15	15	30	–	3
Razem w czasie studiów						90	30	30	30	–	5

Nr tematu	Tematy i ich rozwinięcie	Liczba godzin				
		Razem	W	Ć	L	S
Semestr III						
1.	Podstawowe pojęcia i określenia. Siły zewnętrzne i wewnętrzne, Wykresy rozciągania i ściskania różnych materiałów. Prawo Hooke'a. Prawo Poissona.	4	2	2	–	–
2.	Rozciąganie i ściskanie. Podstawowy warunek wytrzymałościowy. Naprężenia dopuszczalne. Zadania statycznie niewyznaczalne, naprężenia montażowe i termiczne.	6	3	3	–	–
3.	Analiza stanu naprężenia w punkcie, jednoosiowy stan naprężenia, naprężenia główne, koła Mohr'a. Uogólnione prawo Hooke'a.	4	2	2	–	–
4.	Czyste ścinanie, zależność między modułem sprężystości podłużnej a modułem sprężystości postaciowej. Ścinanie techniczne. Obliczenia połączeń spawanych, kołkowych, wpustowych, śrubowych.	4	2	2	–	–
5.	Geometryczne wskaźniki przekrojów.	4	2	2	–	–
6.	Skrećanie przekrojów osiowo symetrycznych i prostokątnych. Obliczenia wałów pędnych.	4	2	2	–	–
7.	Zginanie, wykresy sił tnących i momentów gnących.	4	2	2	–	–
Razem		30	15	15	–	–

Temat 1 (2 godziny):

Podstawowe pojęcia i określenia. Siły zewnętrzne i wewnętrzne. Wykresy rozciągania i ściskania różnych materiałów. Prawo Hooke'a. Prawo Poissona.

Zadanie 1.1

Pręt w kształcie kątownika równoramiennego o wymiarach $50 \times 50 \times 5$ o przekroju poprzecznym $A = 4,8 \text{ cm}^2$ i długości początkowej $l_0 = 2 \text{ m}$, rozciągany jest na końcach siłą $P = 50 \text{ kN}$. Obliczyć naprężenia σ w pręcie, współczynnik bezpieczeństwa n , całkowite wydłużenie Δl pręta, wzdłużne odkształcenie względne ε , poprzeczne odkształcenie względne ε_p . Kątownik wykonany jest ze stali, dla której granica plastyczności $R_e = 210 \text{ MPa}$. Moduł Younga dla stali przyjąć $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$.

Rozwiązanie



Siła wewnętrzna rozciągająca N w dowolnym przekroju poprzecznym pręta, zgodnie z zasadą myślowych przekrojów jest stała i wynosi $N = P = 50 \text{ kN} = 50000 \text{ N}$. Napężenie σ w przecie obliczamy ze wzoru:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{50000}{4,8 \cdot 10^{-4}} = 104 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 104 \text{ MPa}$$

Współczynnik bezpieczeństwa n obliczamy ze wzoru:

$$n = \frac{R_{\varepsilon}}{\sigma} = \frac{210}{104} = 2,02 \cong 2$$

Całkowite wydłużenie Δl pręta obliczamy ze wzoru:

$$\Delta l = \frac{Nl_0}{EA} = \frac{50000 \cdot 2}{2,1 \cdot 10^{11} \cdot 4,8 \cdot 10^{-4}} = \frac{1 \cdot 10^{-2}}{2,1 \cdot 4,8} \cong 1 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1 \text{ mm}$$

Wzdłużne odkształcenie względne ε obliczamy ze wzoru:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{2000} = 0,0005$$

Jako sprawdzenie możemy obliczyć odkształcenie względne ε ze wzoru:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{104 \text{ MPa}}{2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}} = 0,000495 \cong 0,0005$$

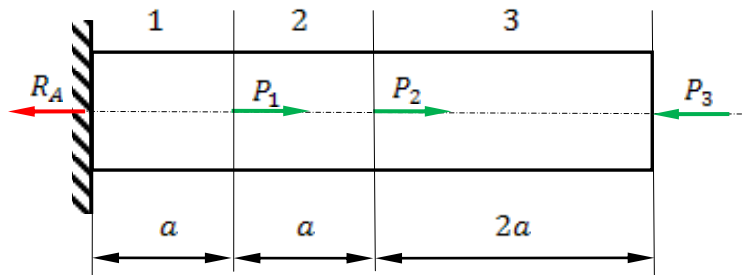
Poprzeczne odkształcenie względne ε_p obliczamy ze wzoru:

$$\varepsilon_p = -\nu\varepsilon = -0,3 \cdot 0,0005 = -0,00015 = -1,5 \cdot 10^{-4}$$

Odp. $\sigma = 104 \text{ MPa}$, $n = 2$, $\Delta l = 1 \text{ mm}$, $\varepsilon = 0,0005$, $\varepsilon_p = -0,00015$

Zadanie 1.2

Pręt stalowy o przekroju poprzecznym $A = 10 \text{ cm}^2$ i długości $l = 4a = 40 \text{ cm}$ obciążony jest trzema siłami $P_1 = 40 \text{ kN}$, $P_2 = 20 \text{ kN}$, $P_3 = 20 \text{ kN}$ o zwrotach jak na rys.1.1. Obliczyć reakcję w miejscu zamocowania pręta, napężenia w poszczególnych częściach pręta oraz całkowite wydłużenie pręta. Pręt wykonany jest ze stali ($E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$).

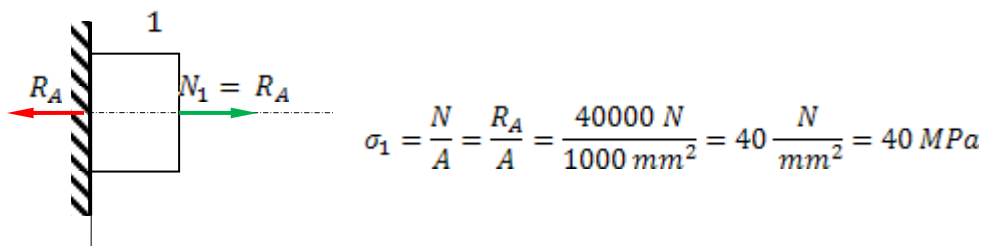


Rys.1.1

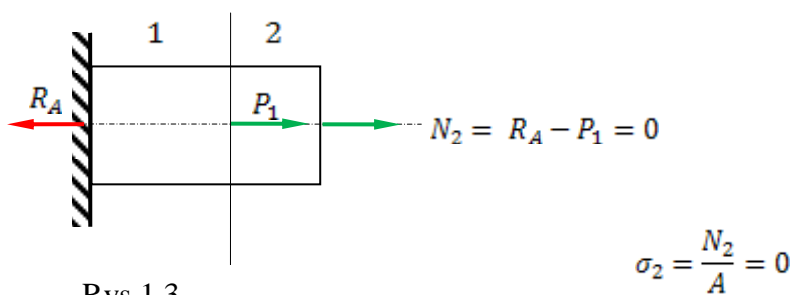
Z warunku sumy rzutów sił na oś pręta wyznaczamy reakcję R_A :

$$\sum M_x = -R_A + P_1 + P_2 - P_3 = 0 \rightarrow R_A = P_1 + P_2 - P_3 = 40 + 20 - 20 = 40 \text{ kN}$$

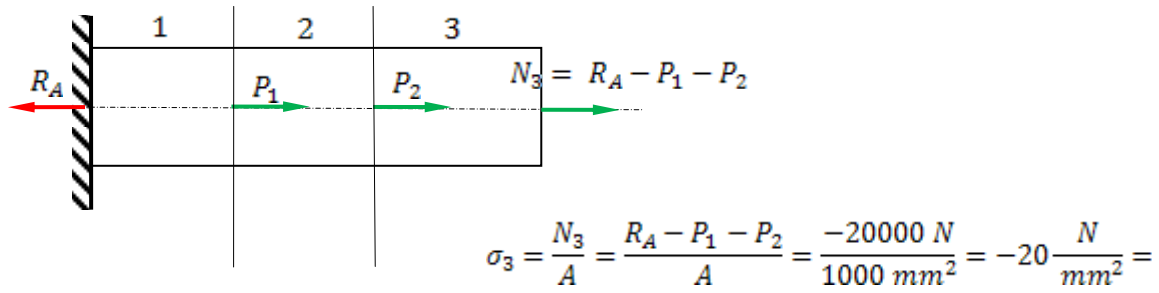
Napężenia w poszczególnych częściach pręta, wyznaczone metodą myślowych przekrojów wyniosą:



Rys.1.2



Rys.1.3



Rys.1.4

Całkowite wydłużenie pręta Δl wyniesie:

$$\Delta l = \frac{N_1 a}{EA} + \frac{N_2 a}{EA} + \frac{N_3 2a}{EA} = \frac{40000a}{EA} + 0 - \frac{20000 \cdot 2a}{EA} = 0$$

Odp. $R_A = 40 \text{ kN}$, $\sigma_1 = 40 \text{ MPa}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -20 \text{ MPa}$, $\Delta l = 0$

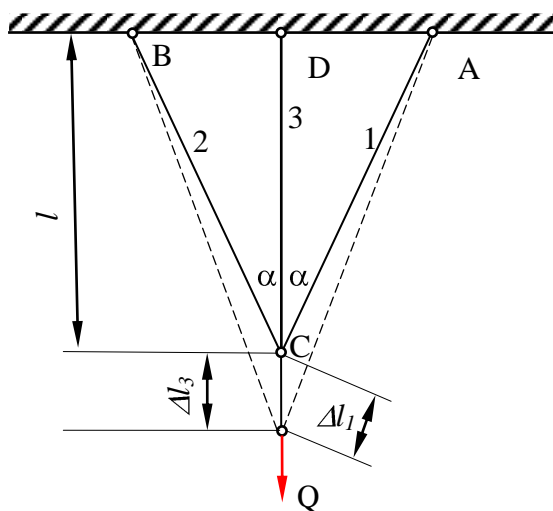


Temat 2 (3 godziny):

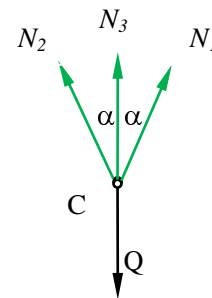
Rozciąganie i ściskanie. Podstawowy warunek wytrzymałościowy. Naprężenia dopuszczalne. Zadania statycznie niewyznaczalne, naprężenia montażowe i termiczne.

Przykład

Wieszak płaski przedstawiony na rys. obciążony jest siłą Q w węźle C . Pręty boczne mają jednakowe przekroje i są wykonane ze stali węglowej. Pręt środkowy jest miedziany. Obliczyć dopuszczalną wartość obciążenia Q jeżeli: kąt $\alpha = 30^\circ$, pola przekrojów prętów stalowych $A_1 = A_2 = 5 \text{ cm}^2$, pole przekroju pręta miedzianego $A_3 = 7 \text{ cm}^2$, moduły Younga odpowiednio dla stali i miedzi $E_{st} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $E_m = 1,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, naprężenia dopuszczalne odpowiednio dla prętów wykonanych ze stali i miedzi $k_{r,st} = 120 \text{ MPa}$, $k_{r,m} = 45 \text{ MPa}$



Rys.6



Rys.6a

Rys.5

Dla ułożenia równań statyki rozpatrzmy równowagę węzła C (rys.6a):

$$\sum P_x = 0 : N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha = 0 : N_1 = N_2$$

$$\sum P_y = 0 : N_3 + 2N_1 \cos \alpha - Q = 0$$

Dla znalezienia równania wiążącego siły niewiadome rozpatrzmy odkształcenia prętów konstrukcji. Jak widać z rys.5 odkształcenia prętów spełniają następującą zależność:

$$\Delta l_1 = \Delta l_3 \cos \alpha$$

Na podstawie prawa Hooke'a zapiszemy:



$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_{st} A_1} \quad \text{oraz} \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E_m A_3}$$

czyli:

$$\frac{N_1 l_1}{E_{st} A_1} = \frac{N_3 l_3}{E_m A_3} \cos \alpha$$

Otrzymaliśmy dodatkowe równanie wiążące ze sobą niewiadome siły N_1 i N_3 . Z tego równania, uwzględniając że $l_3 = l_1 \cos \alpha$, wyznaczamy siłę N_1 :

$$N_1 = N_3 \frac{E_{st} A_1}{E_m A_3} \cos^2 \alpha$$

Podstawiając wyznaczoną wartość siły N_1 do równania równowagi otrzymamy:

$$N_3 + 2N_3 \frac{E_{st} A_1}{E_m A_3} \cos^3 \alpha - Q = 0$$

stąd:

$$N_3 = \frac{Q}{1 + 2 \frac{E_{st} A_1}{E_m A_3} \cos^3 \alpha} = \frac{Q E_m A_3}{E_m A_3 + 2 E_{st} A_1 \cos^3 \alpha}$$

Podstawiając dane liczbowe do wzoru na N_3 :

$$N_3 = \frac{Q \cdot 1,1 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^2}{1,1 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^2 + 2,1 \cdot 10^5 \cdot 7 \cdot 10^2 \cos^3 30^\circ} = 0,365 Q$$

$$N_1 = N_3 \frac{E_{st} A_1}{E_m A_3} \cos^2 \alpha = 0,361 Q \frac{2,1 \cdot 10^5 \cdot 7 \cdot 10^2}{1,1 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^2} \cos^2 30^\circ = 0,374 Q$$

Z podstawowego warunku wytrzymałościowego dla prętów stalowych i pręta miedzianego otrzymamy:

$$\sigma_{st} = \frac{N_1}{A_1} \leq k_{r,st} \quad \text{stąd} \quad = \frac{0,365 Q}{A_1} \leq k_{r,st}$$

czyli

$$Q \leq \frac{A_1 k_{r,st}}{0,365} = \frac{5 \cdot 10^2 \cdot 120 \cdot 10^6}{0,365} = 164,4 \cdot 10^3 N$$

$$\sigma_m = \frac{N_3}{A_3} \leq k_{r,m} \quad \text{stąd} \quad = \frac{0,374 Q}{A_3} \leq k_{r,m}$$



$$Q \leq \frac{A_3 k_{r,m}}{0,374} = \frac{7 \cdot 10^2 \cdot 45 \cdot 10^6}{0,374} = 84,2 \cdot 10^3 N$$

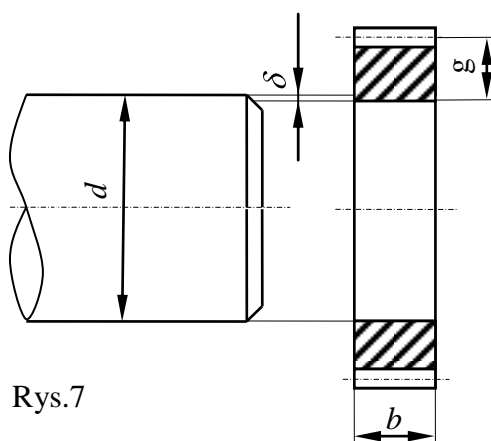
Ponieważ oba warunki muszą być spełnione przyjmujemy wartość mniejszą, która ostatecznie wynosi:

$$Q_{max} \leq 84,2 \cdot 10^3 N.$$

Naprężenia montażowe i termiczne

W konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych małe niedokładności wykonania (przypadkowe lub zamierzone), względnie odkształcenia elementów konstrukcji wywołane zmianami temperatury, powodują powstanie w tych elementach sił wewnętrznych i naprężeń zwanych naprężeniami wstępnymi, gdyż powstają w konstrukcji nieobciążonej. Naprężenia te dodają się algebraicznie do naprężeń wywołanych zadaniem obciążeniem, polepszając lub pogarszając prace konstrukcji. Konstrukcje w których celowo stosuje się ściśle obliczone odchyłki wymiarów nazywa się konstrukcjami wstępnie sprężonymi. Natomiast naprężenia powstałe na skutek niedokładnego wykonania elementów tzw. naprężenia montażowe, podobnie jak naprężenia spowodowane zmianami temperatury (naprężenia termiczne), jako przypadkowe są zawsze szkodliwe i zmuszają konstruktora do zwiększenia współczynnika bezpieczeństwa.

Przykład



Rys.7

Celem stałego połączenia koła zębatego w postaci tulei z wałkiem o średnicy $d = 180$ mm wykonano średnicę wewnętrzną tulei mniejszą od średnicy wałka o $\delta = 0,16$ mm. Średnia grubość tulejki $g = 20$ mm, a szerokość $b = 60$ mm. Wałek i tulejka są wykonane ze stali. Współczynnik tarcia na powierzchni połączenia $\mu = 0,3$. Obliczyć maksymalną siłę osiową i maksymalny moment, jaki może przenieść to połączenie

Warunek odkształceń przyjmie w tym przypadku postać:

$$\delta = \Delta d_w + \Delta d_t$$

gdyż różnica δ musi być pokryta przez zmniejszenie średnicy wałka d_w i zwiększenie średnicy tulei d_t . Ponieważ wałek jest pełny a tuleja jest cienka w porównaniu z jego średnicą, możemy pominąć odkształcenia wałka Δd_w . Wtedy warunek zgodności odkształceń przyjmie uproszczoną postać:

$$\delta = \Delta d_t$$



Zwiększenie średnicy tulei o $\Delta d_t = \delta$ spowoduje sprężyste zwiększenie obwodu Δl :

$$\Delta l = \pi(d_t + \delta) - \pi d_t = \pi \delta$$

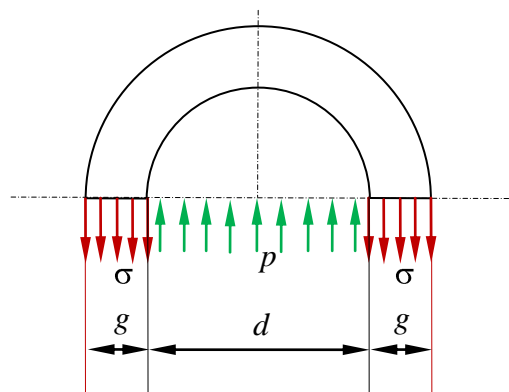
Względne wydłużenie materiału tulei wynosi:

$$\varepsilon = \frac{\pi \delta}{\pi d_t} \approx \frac{\delta}{d} = \frac{0,16}{180} = 0,00089$$

wywołując naprężenia rozciągające

$$\sigma = \varepsilon E = 0,89 \cdot 10^{-3} \cdot 2,1 \cdot 10^6 = 186,5 \text{ MPa}$$

Naprężenia σ w materiale tulei wywołane są ciśnieniami p powstałymi na powierzchni styku tulei z wałkiem. Celem wyznaczenia sił wewnętrznych przetniemy myślowo tuleję wzdłuż średnicy i rozpatrzmy równowagę jednej części (rys. 8):



Rys.8

$$p d b - 2 \sigma g b = 0$$

a stąd

$$p = \frac{2 \sigma g}{d} = \frac{2 \cdot 186,5 \cdot 20}{180} = 41,44 \text{ MPa}$$

Całkowita siła docisku

$$N = \pi d b p$$

$$N = \pi \cdot 180 \cdot 60 \cdot 41,44 = 1406 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Maksymalna siła tarcia (osiowa), jaka może powstać w połączeniu

$$T = \mu N = 0,3 \cdot 1406 \cdot 10^3 = 421,8 \cdot 10^3 \text{ N}$$

a maksymalny moment

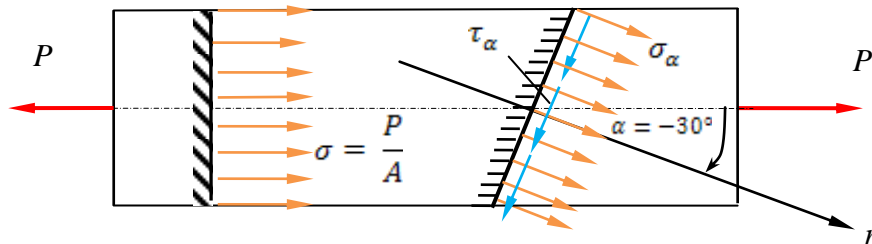
$$M = T \frac{d}{2} = 421,8 \cdot 10^3 \frac{180}{2} = 379,6 \cdot 10^5 \text{ Nmm} = 37,96 \text{ kNm}$$



Temat 3 (2 godziny):

Analiza stanu naprężenia w punkcie, jednoosiowy stan naprężenia, naprężenia główne, koła Mohr'a. Uogólnione prawo Hooke'a.

Obliczyć naprężenia normalne σ_α i naprężenia styczne τ_α w przekroju pręta określonym kątem $\alpha = -30^\circ$. Przekrój poprzeczny pręta jest prostokątem o bokach $b \times h = 20 \times 30 \text{ mm}$. Pręt jest rozciągany siłą $P = 80 \text{ kN}$. Zadanie rozwiązać analitycznie i wykreślić za pomocą koła naprężeń Mohra.



Rys.3.1 Schemat obciążenia rozciąganego pręta.

Rozwiązanie analityczne:

Naprężenia normalne σ_α obliczamy ze wzoru:

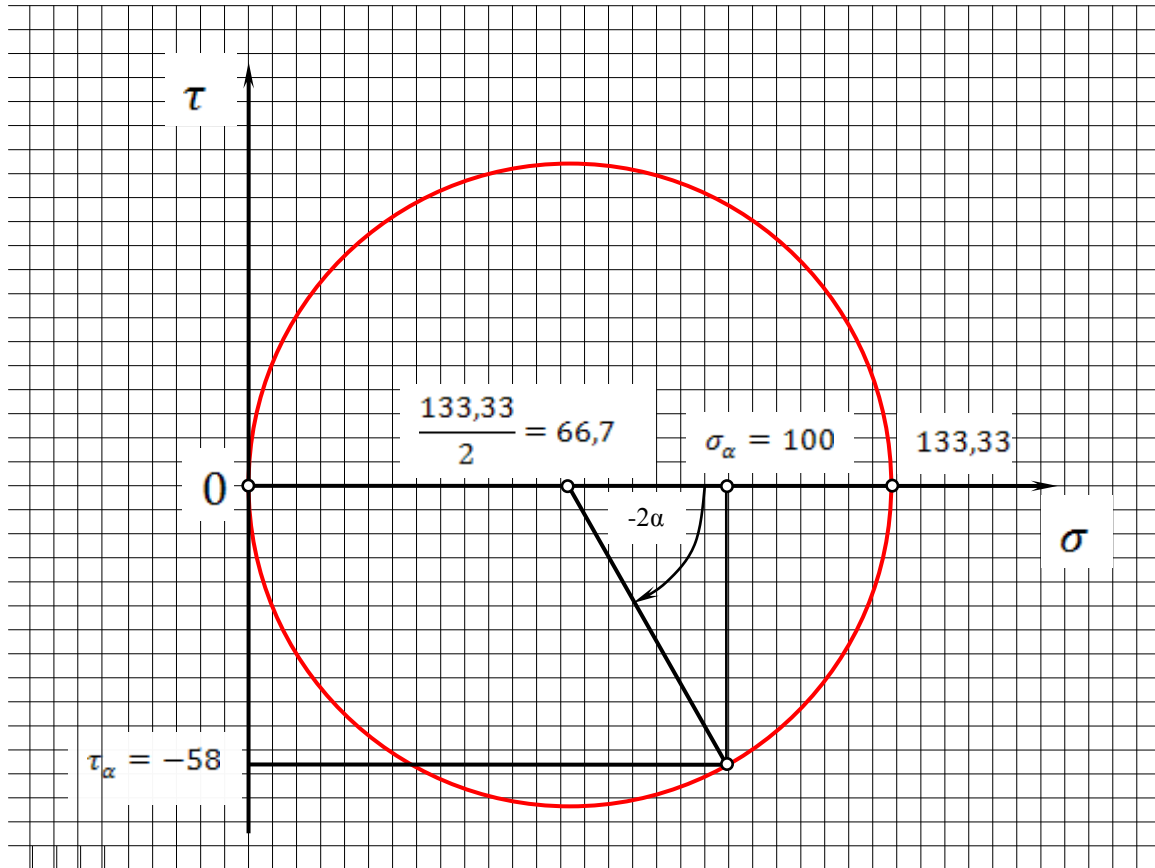
$$\sigma_\alpha = \sigma \cdot \cos^2 \alpha = \frac{P}{A} \cos^2 330^\circ = \frac{80000}{20 \times 30} \cos^2(-30^\circ) = 133,33 \cdot 0,866^2 = 100 \text{ MPa}$$

Naprężenia styczne τ_α obliczamy ze wzoru:

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\alpha = \frac{P}{2A} \sin (2 \cdot (-30^\circ)) = \frac{80000}{2 \cdot 20 \times 30} \sin(-60^\circ) = -66,66 \cdot 0,866$$
$$= -57,73 \text{ MPa}$$



Rozwiązanie wykreślić za pomocą koła naprężeń Mohra:



Rys.3.2 Koło naprężeń Mohra dla rozciąganego pręta.

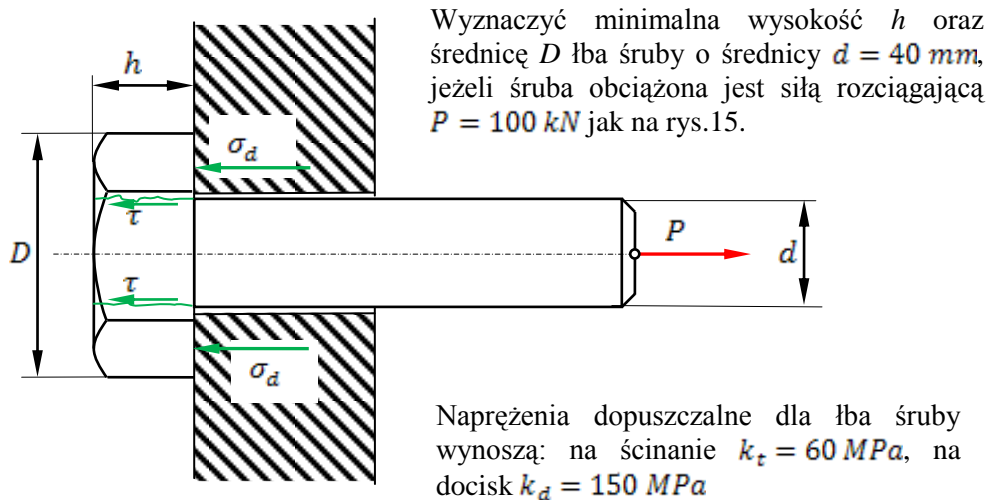


Temat 4 (2 godziny):

Czyste ścinanie, zależność między modulem sprężystości podłużnej a modulem sprężystości postaciowej. Ścinanie techniczne. Obliczenia połączeń spawanych, kołkowych, wpustowych, śrubowych

Zadanie 4.1

Wyznaczyć minimalną wysokość h oraz średnicę D łba śruby o średnicy $d = 40 \text{ mm}$, jeżeli śruba obciążona jest siłą rozciągającą $P = 100 \text{ kN}$ jak na rys.15. Naprężenia dopuszczalne dla łba śruby wynoszą: na ścinanie $k_t = 60 \text{ MPa}$, na docisk $k_d = 150 \text{ MPa}$



Rys.4.1 Schemat obciążeń łba śruby na ścinanie i docisk.

Łeb śruby będzie ścinany siłą $T = P$ w przekroju zaznaczonym na rys.15 linią czerwoną oraz dociskany do płyty na powierzchni A_d :

$$A_d = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}$$

Z warunku na ścinanie otrzymamy:

$$\tau = \frac{P}{\pi d h} \leq k_t$$

stąd:

$$h \geq \frac{P}{\pi d k_t} = \frac{100 \cdot 10^3}{\pi \cdot 40 \cdot 60} = 13,26 \approx 14 \text{ mm}$$

Z warunku na docisk otrzymamy:



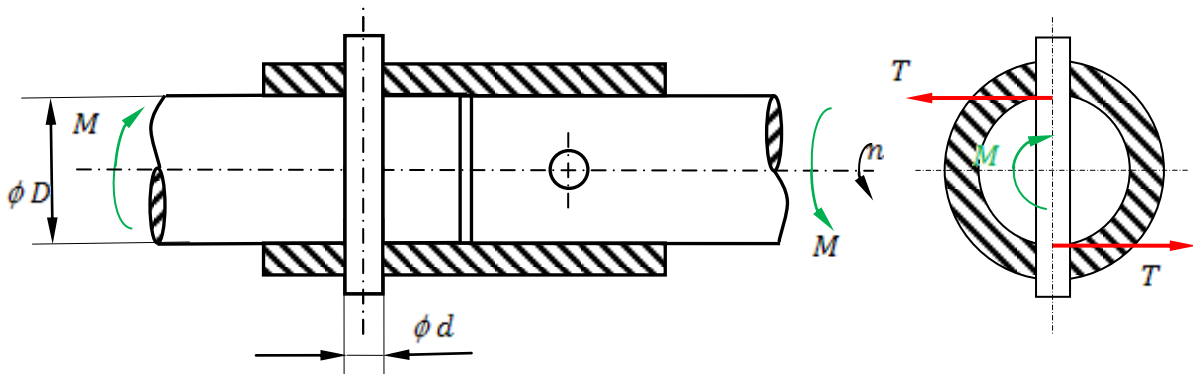
$$\sigma_d = \frac{P}{A_d} \leq k_d$$

$$\frac{P}{\frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}} \leq k_d \rightarrow D \geq \sqrt{\frac{4P}{\pi k_d} + d^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 100^3}{\pi \cdot 150} + 40^2} = 49,5 \approx 50 \text{ mm}$$

Minimalna wysokość łba śruby wynosi $h_{min} = 14 \text{ mm}$, a minimalna średnica łba śruby wynosi $D_{min} = 50 \text{ mm}$.

Zadanie 4.2

Dwa wały o średnicach $D = 50 \text{ mm}$ połączone są tuleją i zamocowane w niej za pomocą kołków, jak na rys.4.2. Wały przenoszą moc $N = 38 \text{ kW}$, przy obrotach $n = 200 \frac{\text{obr}}{\text{min}}$. Obliczyć średnicę kołków, jeżeli wykonane są ze stali, dla której $k_t = 80 \text{ MPa}$.



Rys.4.2 Schemat połączenia kołkowego.

Moment M jaki przenosi to połączenie wyznaczamy ze wzoru:

$$M = \frac{N}{\omega} = \frac{30 \cdot N}{\pi \cdot n} = \frac{30 \cdot 3,8 \cdot 10^6}{\pi \cdot 200} = 181442 \text{ N}$$

gdzie ω jest prędkością kątową, $\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} \frac{\text{rad}}{\text{sek}}$

Siłę ścinającą kołki wyznaczamy ze wzoru:

$$T = \frac{M}{D} = \frac{181442}{50} = 3629 \text{ N}$$

Naprężenia τ ścinające kołki o średnicy d :



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



$$\tau = \frac{T}{A} = \frac{4T}{\pi d^2} \leq k_t$$

Stąd:

$$d \geq \sqrt{\frac{4T}{\pi k_t}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3629}{\pi \cdot 80}} = 7,6 \text{ mm} \cong 8,0 \text{ mm}$$

Odp. $d \geq 7,6 \text{ mm} \cong 8,0 \text{ mm}$



Temat 5 (2 godziny):

Geometryczne wskaźniki przekrojów

Zadanie 5.1

Wyznaczyć momenty bezwładności i promienie bezwładności prostokąta o wymiarach $b \times h$, względem osi x, y będących osiami symetrii.

Dla obliczenia I_x wybieramy pole elementarne :

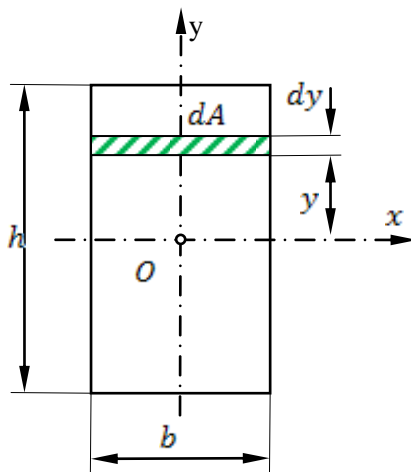
$$dA = b dy$$

i podstawiamy do wzoru:

$$I_x = \int_A y^2 dA = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{12}$$

Analogicznie otrzymamy:

$$I_y = \int_A x^2 dA = \frac{hb^3}{12}$$



Rys.5.1

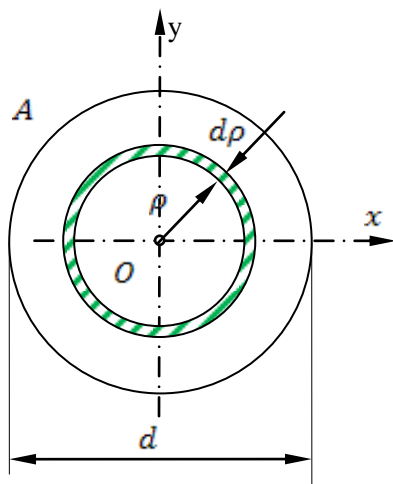
Dla obliczenia promieni bezwładności zastosujemy wzory:

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3}{12bh}} = \frac{h}{\sqrt{12}}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{12bh}} = \frac{b}{\sqrt{12}}$$

Zadanie 5.2

Wyznaczyć moment bezwładności koła względem jego środka i względem jego średnicy.



Ze względu na kołową symetrię obliczymy najpierw biegunowy moment bezwładności J_o , obierając jako pole elementarne dA pole pierścienia o promieniu ρ i grubości $d\rho$:
 $dA = 2\pi\rho d\rho$

i podstawiamy do wzoru:

$$J_x = \int_A y^2 dA = \int_0^{\frac{d}{2}} \rho^2 2\pi\rho d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^4}{32}$$

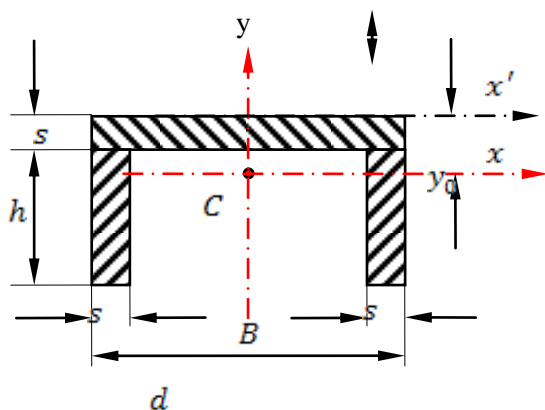
Dla wyznaczenia momentu bezwładności względem średnicy uwzględniamy, że moment bezwładności koła względem każdej średnicy jest jednakowy:

$$J_x = J_y = \frac{J_o}{2} = \frac{\pi d^4}{64}$$

Rys.5.2

Zadanie 5.3

Obliczyć główne centralne momenty bezwładności przekroju ceownika symetrycznego. Wymiary wynoszą: $B = 60 \text{ mm}$, $h = 30 \text{ mm}$, $s = 10 \text{ mm}$.



Dzielimy figurę na części, których środki geometryczne możemy ściśle określić i podział ten zaznaczamy na rys. Wyznaczamy położenie środka geometrycznego C . Będzie on leżał na osi symetrii y w odległości y_0 od osi x' , przyjętej jak na rys. :

$$y_0 = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{Bs \frac{s}{2} + 2hs(\frac{h}{2} + s)}{Bs + 2hs}$$

$$y_0 = \frac{6 \cdot 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2,5}{6 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1} = 1,5 \text{ cm}$$

Rys.5.3

Znając położenie środka geometrycznego obliczamy główne centralne momenty bezwładności wykorzystując twierdzenie Steinera:



$$I_x = \frac{Bs^3}{12} + Bs\left(y_0 - \frac{s}{2}\right)^2 + 2\left[\frac{sh^3}{12} + sh\left(\frac{h}{2} + s - y_0\right)^2\right]$$

$$I_x = \frac{6 \cdot 1^3}{12} + 6 \cdot 1 \cdot 1^2 + 2\left[\frac{1 \cdot 3^3}{12} + 3 \cdot 3 \cdot 1^2\right] = 17 \text{ cm}^4$$

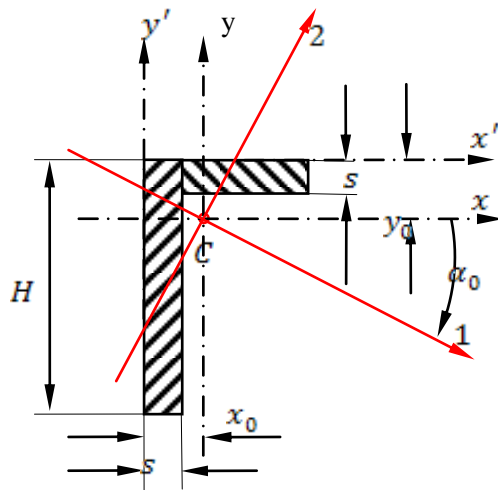
$$I_y = \frac{sB^3}{12} + 2\left[\frac{hs^3}{12} + hs\left(\frac{B}{2} + \frac{s}{2}\right)^2\right]$$

$$I_y = \frac{1 \cdot 6^3}{12} + 2\left[\frac{3 \cdot 1^3}{12} + 3 \cdot 1 \cdot 2,5^2\right] = 56 \text{ cm}^4$$

Odp. $I_x = 17 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ $I_y = 56 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$

Zadanie 5.4

Wyznaczyć położenie głównych centralnych osi bezwładności i obliczyć momenty bezwładności względem tych osi dla przekroju kątownika niesymetrycznego. Wymiary wynoszą: $H = 60 \text{ mm}$, $b = 30 \text{ mm}$, $s = 10 \text{ mm}$.



Rys.5.4

Dzielimy kątownik na prostokąty, i podział ten zaznaczamy na rys. Wyznaczamy położenie środka geometrycznego C , przyjmujemy osie x' i y' :

$$y_0 = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i} = \frac{Hs \frac{H}{2} + bs \frac{s}{2}}{Hs + bs}$$

$$y_0 = \frac{6 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 0,5}{6 \cdot 1 + 3 \cdot 1} = 2,17 \text{ cm}$$

$$x_0 = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{Hs \frac{s}{2} + bs\left(\frac{b}{2} + s\right)}{Hs + bs}$$

$$x_0 = \frac{6 \cdot 1 \cdot 0,5 + 3 \cdot 1 \cdot 2,5}{6 \cdot 1 + 3 \cdot 1} = 1,17 \text{ cm}$$

Obliczamy I_x, I_y oraz I_{xy} dla układu osi C, x, y :



$$J_x = \frac{sH^3}{12} + sH\left(\frac{H}{2} - y_0\right)^2 + \frac{bs^3}{12} + bs\left(y_0 + \frac{s}{2}\right)^2$$

$$J_x = \frac{1 \cdot 6^3}{12} + 1 \cdot 6 \cdot 0,83^2 + \frac{3 \cdot 1^3}{12} + 3 \cdot 1 \cdot 1,67^2 = 30,75 \text{ cm}^4$$

$$J_y = \frac{Hs^3}{12} + sH\left(\frac{s}{2} - y_0\right)^2 + \frac{sb^3}{12} + bs\left(\frac{b}{2} + s - y_0\right)^2$$

$$J_y = \frac{6 \cdot 1^3}{12} + 6 \cdot 1 \cdot 0,67^2 + \frac{1 \cdot 3^3}{12} + 3 \cdot 1 \cdot 1,33^2 = 10,75 \text{ cm}^4$$

$$J_{xy} = bs\left(y_0 - \frac{s}{2}\right)\left(\frac{b}{2} + s - x_0\right) + Hs\left(y_0 - \frac{H}{2}\right)\left(-x_0 + \frac{s}{2}\right)$$

$$J_{xy} = 3 \cdot 1 \cdot 1,67 \cdot 1,33 + 6 \cdot 1 \cdot (-0,83) \cdot (-0,67) = 10 \text{ cm}^4$$

Wyznaczamy położenie osi głównych:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2J_{xy}}{J_x - J_y} = \frac{-2 \cdot 10}{30,75 - 10,75} = -1$$

stąd:

$$2\alpha = -45^\circ \rightarrow \alpha = 22,5^\circ$$

Osie główne 1, 2 nanosimy na rysunek profilu. Obliczamy główne centralne momenty bezwładności:

$$I_1 = \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \sqrt{\left[\frac{1}{2}(J_x - J_y)\right]^2 + J_{xy}^2}$$

$$I_1 = \frac{1}{2}(30,75 + 10,75) + \sqrt{\left[\frac{1}{2}(30,75 - 10,75)\right]^2 + 10^2} = 20,75 + 14,15 = 34,9 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(J_x + J_y) - \sqrt{\left[\frac{1}{2}(J_x - J_y)\right]^2 + J_{xy}^2}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(30,75 + 10,75) - \sqrt{\left[\frac{1}{2}(30,75 - 10,75)\right]^2 + 10^2} = 20,75 - 14,15 = 6,6 \text{ cm}^4$$

Odp. $\alpha_0 = -22,5^\circ$ $J_1 = 34,9 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ $J_2 = 6,6 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$

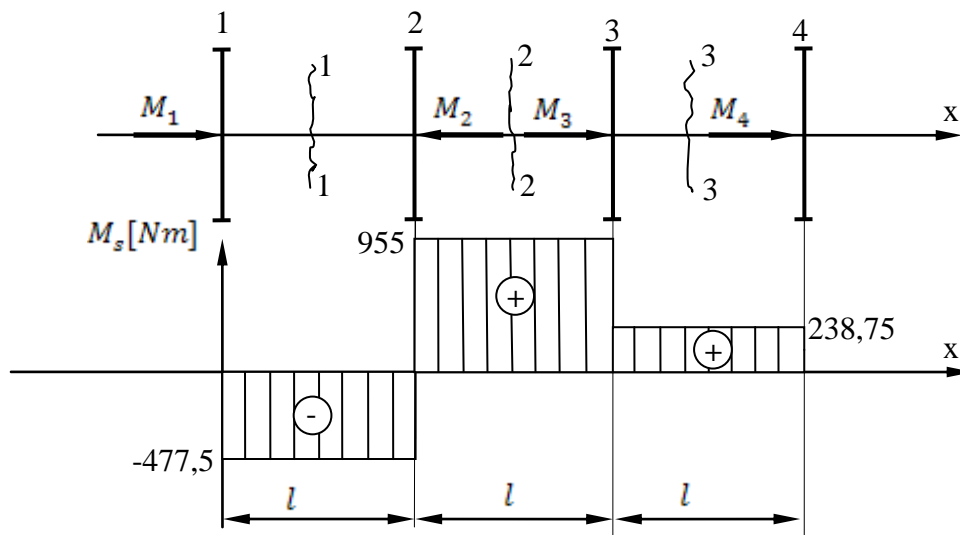


Temat 6 (2 godziny):

Skręcanie przekrojów osiowo symetrycznych i prostokątnych. Obliczenia wałów pędnych

Zadanie 6.1

Na wale pośrednim przekładni osadzone są cztery koła zębate. Koło 2 połączone jest z silnikiem o mocy $N_2 = 60 \text{ kW}$, a pozostałe z maszynami roboczymi pobierającymi moce odpowiednio: $N_1 = 20 \text{ kW}$, $N_3 = 30 \text{ kW}$, $N_4 = 10 \text{ kW}$. Wał wykonuje $n = 400 \frac{\text{obr}}{\text{min}}$. Odległość pomiędzy poszczególnymi kołami $l = 1,2 \text{ m}$. Wyznaczyć maksymalny moment skręcający wał, zaprojektować wał pełny o stałym przekroju, jeżeli naprężenia dopuszczalne na skręcanie $k_s = 40 \text{ MPa}$. Dla zaprojektowanego wału wyznaczyć kąt skręcenia przekrojów skrajnych.



Rys.6.1

Wyliczamy momenty przyłożone do poszczególnych kół:

$$M_1 = 9550 \frac{N_1}{n} = 9550 \frac{20}{400} = 477,5 \text{ Nm}$$

$$M_2 = 9550 \frac{N_2}{n} = 9550 \frac{60}{400} = 1432,5 \text{ Nm}$$



$$M_3 = 9550 \frac{N_3}{n} = 9550 \frac{30}{400} = 716,25 \text{ Nm}$$

$$M_4 = 9550 \frac{N_4}{n} = 9550 \frac{10}{400} = 238,75 \text{ Nm}$$

Obliczamy momenty skręcające, działające w poszczególnych odcinkach wału:

$$M_{s1} = -M_1 = -477,5 \text{ Nm}$$

$$M_{s2} = -M_1 + M_2 = -477,5 + 1432,5 = 955 \text{ Nm}$$

$$M_{s3} = -M_1 + M_2 - M_3 = -477,5 + 1432,5 - 716,25 = 238,75 \text{ Nm}$$

i sporządzamy wykres momentów skręcających, przedstawiony na rys. Wykres kreskujemy pionowo. Z wykresu momentów skręcających odczytujemy maksymalny moment skręcający, który wynosi:

$$M_{smax} = 995 \text{ Nm}$$

Naprężenia maksymalne przy skręcaniu:

$$\tau_{max} = \frac{M_{smax}}{W_0} = \frac{16M_{smax}}{\pi d^3} \leq k_s$$

stąd:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{smax}}{\pi k_s}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 995}{\pi \cdot 40 \cdot 10^5}} = 0,050 \text{ m} = 50 \text{ mm}$$

Całkowity kąt skręcenia wału obliczamy z wzoru:

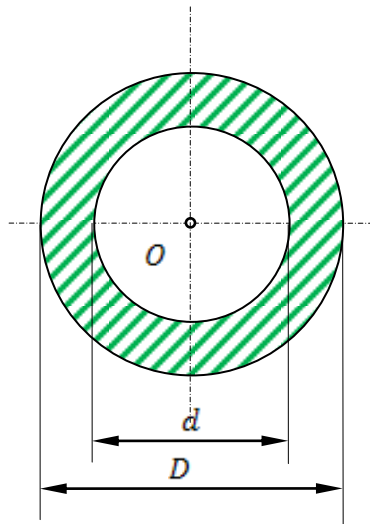
$$\varphi = \frac{180^\circ}{\pi} \left(\frac{M_{s1} \cdot l}{GJ_0} + \frac{M_{s2} \cdot l}{GJ_0} + \frac{M_{s3} \cdot l}{GJ_0} \right) = \frac{180^\circ \cdot l}{\pi \cdot GJ_0} (M_{s1} + M_{s2} + M_{s3})$$

$$\varphi = \frac{180^\circ \cdot 1,2 \cdot 32}{\pi \cdot 0,81 \cdot 10^{11} \cdot \pi \cdot 5^4 \cdot 10^{-8}} (-477,5 + 955 + 238,75) = 0,991^\circ$$

Odp. $d = 50 \text{ mm}$ $\varphi = 0,991^\circ$



Zadanie 6.2



Rys.6.2

Obliczyć średnicę wału napędowego statku ze względu na skęcanie o mocy maszyny głównej $N = 5300 \text{ kW}$, mającego $n = 110 \frac{\text{obr}}{\text{min}}$, jeśli naprężenia dopuszczalne na skęcanie $k_s = 40 \text{ MPa}$. Stosunek średnicy wewnętrznej do zewnętrznej przyjąć $k = \frac{d}{D} = 0,7$.

Moment skęcający wał wyniesie:

$$M_s = 9550 \frac{N}{n} = 9550 \frac{5300}{110} = 460136 \text{ Nm}$$

Dla przekroju pierścieniowego biegunowy moment bezwładności wyniesie:

$$J_0 = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$$

a wskaźnik wytrzymałości na skęcanie:

$$W_0 = \frac{J_0}{D} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$$

$$\tau_{max} = \frac{M_{smax}}{W_0} = \frac{16M_{smax}}{\pi D^3 (1 - \alpha^4)} \leq k_s$$

stąd:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16M_{smax}}{\pi k_s (1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 460136}{\pi \cdot 40 \cdot 10^6 \cdot (1 - 0,7^4)}} = 0,624 \text{ m} \approx 630 \text{ mm}$$

$$d = \alpha \cdot D = 0,7 \cdot 0,624 = 0,437 \text{ mm} \approx 440 \text{ mm}$$

Odp. $D = 630 \text{ mm}$

$d = 440 \text{ mm}$



Temat 7 (2 godziny):

Zginanie, wykresy sił tnących i momentów gnących

Zadanie 7.1

Belka swobodnie podparta ze wspornikiem o długości $\frac{5}{4}l$ jest obciążona ciężarem ciągłym o natężeniu $q = \text{const}$, siłą skupioną $P = \frac{ql}{8}$ i parą sił o momencie $M = \frac{ql^2}{32}$, jak na rys.28. Wykonać wykres sił tnących i momentów zginających oraz określić ich maksymalne wartości.

Obliczenie reakcji:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow P \frac{l}{4} - q \frac{l}{2} \frac{l}{4} - M + R_B l = 0$$

$$\frac{ql^2}{32} - \frac{ql^2}{8} - \frac{ql^2}{32} + R_B l = 0$$

$$R_B = \frac{ql}{8}$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow P \frac{5l}{4} + q \frac{l}{2} \frac{3l}{4} - M - R_A l = 0$$

$$\frac{5ql^2}{32} + \frac{3ql^2}{8} - \frac{ql^2}{32} - R_A l = 0$$

$$R_A = \frac{ql}{2}$$

Sprawdzenie reakcji:

$$\sum M_C = 0 \rightarrow R_A \frac{l}{4} - q \frac{l}{2} \frac{l}{2} - M + R_{AB} \frac{5l}{4} = 0$$

$$\frac{ql}{2} \frac{l}{4} - \frac{ql^2}{4} - \frac{ql^2}{32} + \frac{ql}{8} \frac{5l}{4} = 0$$

$$\frac{9ql^2}{32} - \frac{9ql^2}{32} = 0$$



Znając wszystkie siły zewnętrzne możemy przystąpić do wykonania wykresów sił tnących i momentów zginających. Na odcinku CA siła tnąca jest stała i równa:

$$T(x) = -P = -\frac{ql}{8}$$

Na odcinku AD wykres sił tnących będzie funkcją pierwszego stopnia:

$$T(x) = -P + R_A - q\left(x - \frac{l}{4}\right)$$

W przekroju nad podporą A wartość zmiennej niezależnej $x = \frac{l}{4}$ wobec czego:

$$T\left(x = \frac{l}{4}\right) = -P + R_A - q\left(\frac{l}{4} - \frac{l}{4}\right) = -\frac{ql}{8} + \frac{ql}{2} = \frac{3ql}{8}$$

W przekroju D wartość zmiennej niezależnej $x = \frac{3l}{4}$ wobec czego:

$$T\left(x = \frac{3l}{4}\right) = -P + R_A - q\left(\frac{3l}{4} - \frac{l}{4}\right) = -\frac{ql}{8} + \frac{ql}{2} - \frac{ql}{2} = -\frac{ql}{8}$$

Na tym odcinku siła tnąca zmienia znak, przechodząc przez zero, wobec czego moment zginający osiągnie na tym odcinku ekstremum lokalne. Wystąpi ono w przekroju o odciętej x_0 , której wartość obliczymy przyrównując do zera wyrażenie na siłę tnącą dla tego odcinka:

$$T(x = x_0) = -P + R_A - q\left(x_0 - \frac{l}{4}\right) = 0$$

czyli:

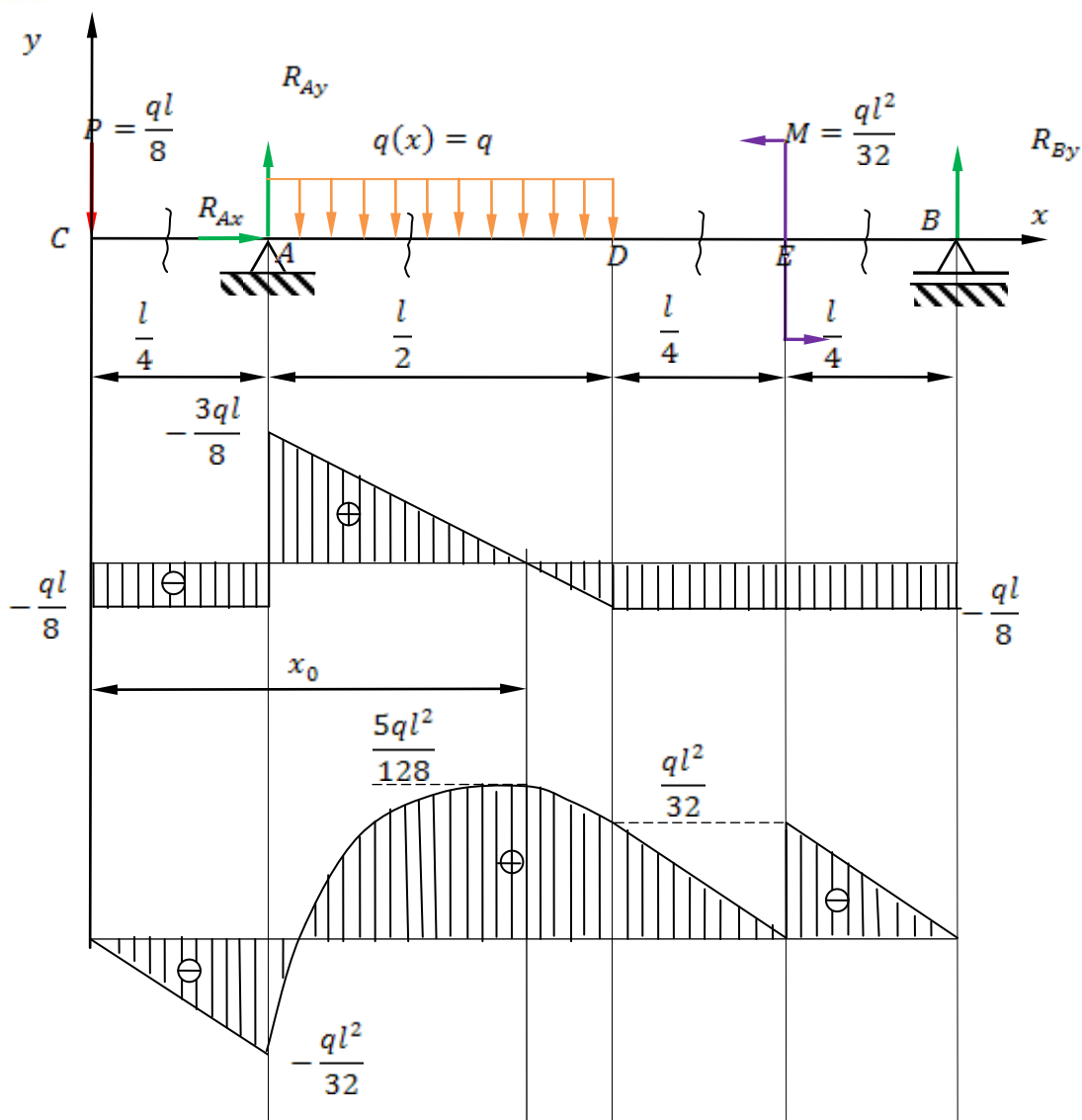
$$-\frac{ql}{8} + \frac{ql}{2} - q\left(x_0 - \frac{l}{4}\right) = 0 \rightarrow -\frac{l}{8} + \frac{l}{2} - x_0 + \frac{l}{4} = 0$$

$$x_0 = \frac{5l}{8}$$

Na odcinku DB siła tnąca będzie stała i równa:

$$T(x) = -P + R_A - \frac{ql}{2} = -\frac{ql}{8} + \frac{ql}{2} - \frac{ql}{2} = -\frac{ql}{8}$$

lub równa reakcji R_{BY} ze znakiem minus, co możemy potraktować jako sprawdzenie prawidłowości obliczeń.



Rys.7.1 Wyznaczanie sił wewnętrznych w myślowych przekrojach.

Przechodzimy do wykonania wykresów momentów zginających, zaczynając od lewej strony belki. Na odcinku CA moment zginający będzie funkcją liniową:

$$M(x) = -Px$$

W przekroju C jest $x = 0$, wobec czego $M(x = 0) = -P \cdot 0 = 0$. W przekroju A jest $x = \frac{l}{4}$, wobec czego:

$$M\left(x = \frac{l}{4}\right) = -P \frac{l}{4} = -\frac{ql^2}{32}$$

Na odcinku AD moment zginający będzie funkcją paraboliczną:



$$\begin{aligned} M(x) &= -Px + R_A \left(x - \frac{l}{4}\right) - q \left(x - \frac{l}{4}\right) \frac{\left(x - \frac{l}{4}\right)}{2} = \\ &= -\frac{ql}{8}x + \frac{ql}{2} \left(x - \frac{l}{4}\right) - q \frac{\left(x - \frac{l}{4}\right)^2}{2} \end{aligned}$$

W przekroju A jest $x = \frac{l}{4}$, wobec czego:

$$M\left(x = \frac{l}{4}\right) = -\frac{ql}{8} \frac{l}{4} = -\frac{ql^2}{32}$$

W przekroju D jest $x = \frac{3l}{4}$, wobec czego:

$$\begin{aligned} M\left(x = \frac{3l}{4}\right) &= -\frac{ql}{8} \frac{3l}{4} + \frac{ql}{2} \left(\frac{3l}{4} - \frac{l}{4}\right) - q \frac{\left(\frac{3l}{4} - \frac{l}{4}\right)^2}{2} = \\ &= -\frac{3ql^2}{32} + \frac{ql}{2} \frac{l}{2} - \frac{ql^2}{8} = \frac{ql^2(-3 + 8 - 4)}{32} = \frac{ql^2}{32} \end{aligned}$$

W przekroju $x = x_0 = \frac{5l}{8}$ moment ekstremalny lokalnie wyniesie:

$$\begin{aligned} M\left(x = \frac{5l}{8}\right) &= -\frac{ql}{8} \frac{5l}{8} + \frac{ql}{2} \left(\frac{5l}{8} - \frac{l}{4}\right) - q \frac{\left(\frac{5l}{8} - \frac{l}{4}\right)^2}{2} = \\ &= -\frac{ql}{8} \frac{5l}{8} + \frac{ql}{2} \frac{3l}{8} - q \frac{\left(\frac{3l}{8}\right)^2}{2} = \frac{ql^2(-10 + 24 - 9)}{128} = \frac{5ql^2}{128} \end{aligned}$$

Na odcinku DE moment zginający będzie funkcją liniową:

$$\begin{aligned} M(x) &= -Px + R_A \left(x - \frac{l}{4}\right) - q \frac{l}{2} \left(x - \frac{l}{2}\right) = \\ &= -\frac{ql}{8}x + \frac{ql}{2} \left(x - \frac{l}{4}\right) - q \frac{l}{2} \left(x - \frac{l}{2}\right) \end{aligned}$$

W przekroju D jest $x = \frac{3l}{4}$, wobec czego:

$$M\left(x = \frac{3l}{4}\right) = -\frac{ql}{8} \frac{3l}{4} + \frac{ql}{2} \left(\frac{3l}{4} - \frac{l}{4}\right) - q \frac{l}{2} \left(\frac{3l}{4} - \frac{l}{2}\right) =$$



$$-\frac{ql3l}{84} + \frac{ql}{22} - q\frac{l}{24} = \frac{ql^2(-3+8-4)}{32} = \frac{ql^2}{32}$$

W przekroju E jest $x = l$, wobec czego:

$$M(x=l) = -\frac{ql}{8}l + \frac{ql}{2}\left(l - \frac{l}{4}\right) - q\frac{l}{2}\left(l - \frac{l}{2}\right) =$$

$$-\frac{ql}{8}l + \frac{ql3l}{24} - q\frac{l}{22} = \frac{ql^2(-1+3-2)}{8} = 0$$

Na odcinku EB moment zginający będzie funkcją liniową identyczną jak w poprzednim przedziale, ale powiększoną o pojawiający się w tym przedziale moment $M = \frac{ql^2}{32}$:

$$M(x) = -Px + R_A\left(x - \frac{l}{4}\right) - q\frac{l}{2}\left(x - \frac{l}{2}\right) + M =$$

$$= -\frac{ql}{8}x + \frac{ql}{2}\left(x - \frac{l}{4}\right) - q\frac{l}{2}\left(x - \frac{l}{2}\right) + \frac{ql^2}{32}$$

W przekroju E jest $x = l$, wobec czego:

$$M(x=l) = -\frac{ql}{8}l + \frac{ql}{2}\left(l - \frac{l}{4}\right) - q\frac{l}{2}\left(l - \frac{l}{2}\right) + \frac{ql^2}{32} =$$

$$-\frac{ql}{8}l + \frac{ql3l}{24} - q\frac{l}{22} + \frac{ql^2}{32} = \frac{ql^2(-4+12-8+1)}{32} = \frac{ql^2}{32}$$

W przekroju B jest $x = \frac{5l}{4}$, wobec czego:

$$M\left(x = \frac{5l}{4}\right) = -\frac{ql5l}{84} + \frac{ql}{2}\left(\frac{5l}{4} - \frac{l}{4}\right) - q\frac{l}{2}\left(\frac{5l}{4} - \frac{l}{2}\right) + \frac{ql^2}{32} =$$

$$-\frac{ql5l}{84} + \frac{ql}{2}l - q\frac{l3l}{24} + \frac{ql^2}{32} = \frac{ql^2(-5+16-12+1)}{32} = 0$$

Celem sprawdzenia prawidłowości obliczeń można jeszcze raz wyznaczyć wartość momentu zginającego w przekroju E, zaczynając od prawej strony:

$$M\left(x_l = \frac{l}{4}\right) = R_B \frac{l}{4} = \frac{ql}{8} \frac{l}{4} = \frac{ql^2}{32}$$

Wykresy momentów zginających i sił tnących przedstawione są na rys.28. Z wykresów odczytujemy:



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



$$T_{max} = \frac{3}{8}ql$$

$$M_{gmax} = \frac{5}{128}ql^2$$

przy czym wartości te występują w różnych przekrojach.