



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Materiały dydaktyczne

Matematyka

Semestr II

Wykłady



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

	Przedmiot:	MATEMATYKA									
Kierunek: Mechatronika											
Rozkład zajęć w czasie studiów – Studia pierwszego stopnia											
Semestr	Liczba tygodni w semestrze	Liczba godzin w tygodniu				Liczba godzin w semestrze				Punkty kredytowe	
		W	Ć	L	S	Σ	W	Ć	L		S
II	15	1	2	–	–	45	15	30	–	–	4

Związki z innymi przedmiotami:

- fizyka,
- mechanika techniczna,
- wytrzymałość materiałów,
- podstawy konstrukcji maszyn,
- elektrotechnika i elektronika,
- automatyka i robotyka,
- metrologia i systemy pomiarowe.

Zakres wiedzy do opanowania

Po wysłuchaniu wykładów przewidywanych programem oraz wykonaniu ćwiczeń student powinien:

Znać →

- 1) Definicje i podstawowe twierdzenia dotyczące zbioru liczb zespolonych, macierzy, wyznaczników i układów równań liniowych.
- 2) Rachunek wektorowy, równania płaszczyzny i prostej w przestrzeni R^3 .
- 3) Definicje i podstawowe twierdzenia dotyczące wszechstronnego badania przebiegu zmienności funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.
- 4) Podstawowe zagadnienia dotyczące rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych.
- 5) Podstawy rachunku całkowego (całka nieoznaczona, całka oznaczona, całki niewłaściwe, całki wielokrotne i krzywoliniowe).
- 6) Kryteria zbieżności szeregów liczbowych, podstawowe twierdzenia dotyczące szeregów funkcyjnych.
- 7) Sposoby rozwiązywania wybranych typów równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego i drugiego rzędu.
- 8) Elementy rachunku prawdopodobieństwa, podstawy statystyki matematycznej.

Umieć →

- 1) Wykonywać działania na liczbach zespolonych i macierzach, obliczać wyznaczniki oraz rozwiązywać układy równań liniowych metodą macierzową, za pomocą wzorów Cramera oraz w oparciu o twierdzenie Kroneckera-Capellego.



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

- 2) Przeprowadzać wszechstronne badanie funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.
- 3) Wyznaczać całki nieoznaczone, obliczać całki oznaczone, podwójne, potrójne i krzywoliniowe, stosować rachunek całkowy w geometrii i przedmiotach technicznych.
- 4) Wyznaczać ekstrema lokalne i warunkowe funkcji wielu zmiennych, badać zbieżność szeregów liczbowych i funkcyjnych, rozwijać funkcje w szereg Taylora.
- 5) Rozwiązywać wybrane typy równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych pierwszego i drugiego rzędu.
- 6) Obliczać prawdopodobieństwo zdarzeń losowych, wyznaczać estymatory i przedziały ufności, stosować testy statystyczne do weryfikacji hipotez statystycznych.

Treść zajęć dydaktycznych

Nr tematu	Tematy i ich rozwinięcie	Liczba godzin				
		Razem	W	Ć	L	S
Semestr II						
1.	Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej rzeczywistej: całka nieoznaczona, podstawowe twierdzenia, metody całkowania, całkowanie funkcji wymiernych, niewymiernych i trygonometrycznych, całka oznaczona (definicja według Riemanna), podstawowe twierdzenia i własności całki oznaczonej, całki niewłaściwe, zastosowania całki oznaczonej w geometrii.	5	5	–	–	–
2.	Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych: zbiory płaskie, definicja funkcji wielu zmiennych, granica i ciągłość funkcji dwóch zmiennych, pochodne cząstkowe, pochodne funkcji złożonej, różniczka zupełna, pochodne cząstkowe i różniczki zupełne wyższych rzędów, zastosowanie różniczki zupełnej w rachunku błędów, wzór, Taylora, ekstrema funkcji wielu zmiennych.	4	4	–	–	–
3.	Rachunek całkowy funkcji wielu zmiennych: definicja i podstawowe własności całki podwójnej w obszarze normalnym, całka potrójna, zamiana całek wielokrotnych na całki iterowane, zamiana zmiennych, całki krzywoliniowe, twierdzenie Greena, zastosowania geometryczne całek wielokrotnych i całek krzywoliniowych.	4	4	–	–	–
4.	Szeregi liczbowe i funkcyjne: definicja szeregu liczbowego, kryteria zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych, szeregi naprzemienne, szeregi liczbowe warunkowo i bezwzględnie zbieżne, ciągi i szeregi funkcyjne, szeregi potęgowe, szereg Taylora.	2	2	–	–	–
Razem		15	15	–	–	–

I. Metody dydaktyczne

Przedmiot jest realizowany w formie wykładów i ćwiczeń rachunkowych na I i II roku studiów. Pomoce dydaktyczne stanowią:



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

- literatura podstawowa i uzupełniająca do wykładów i ćwiczeń rachunkowych,
- dzienniczki studentów.

II. Forma i warunki zaliczenia przedmiotu

II-1. Forma i warunki zaliczenia wykładów

- obecność studenta na wykładach,
- uzyskanie pozytywnych ocen z 2 sprawdzianów pisemnych w ciągu semestru przeprowadzonych w terminach uzgodnionych ze studentami,
- egzamin po I semestrze,
- zaliczenie z oceną po II semestrze,
- egzamin po III semestrze.

II-2. Forma i warunki zaliczenia ćwiczeń rachunkowych

- obecność studenta na ćwiczeniach,
- uzyskanie pozytywnych ocen z 2 sprawdzianów pisemnych w ciągu semestru przeprowadzonych w terminach uzgodnionych ze studentami,
- zaliczenie z oceną.



WIII

CAŁKA NIEOZNACZONA

1. Definicja całki nieoznaczonej
2. Podstawowe twierdzenia
3. Metody całkowania
4. Całkowanie funkcji wymiernych

1. W rachunku różniczkowym rozwiązywaliśmy następujące zadanie: mając funkcję $F(x)$ znajdowaliśmy jej pochodną $F'(x) = f(x)$. Obecnie rozwiążemy zadanie odwrotne: mając daną funkcję $f(x)$ będziemy znajdować funkcję $F(x)$, której pochodna równa jest danej funkcji.

Definicja

Funkcję $F(x)$ taką, że jej pochodna równa się danej funkcji

$$f(x) \text{ dla } x \in (a, b) \text{ tzn. } F'(x) = f(x)$$

nazywamy **funkcją pierwotną** funkcji $f(x)$. Jeżeli dwie funkcje mają w pewnym przedziale równe pochodne, to mogą różnić się co najwyżej o stałą

$$\left(\bigwedge_{x \in (a, b)} f'(x) = g'(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + C, \text{ gdzie } C - \text{dowolna stała} \right)$$

Z twierdzenia tego wynika, że jeżeli $F(x)$ jest funkcją pierwotną, to dowolna funkcja pierwotna funkcji $f(x)$ jest postaci $G(x) = F(x) + C$.

Definicja

Zbiór funkcji pierwotnych danej funkcji $f(x)$ nazywamy **całką nieoznaczoną** funkcji $f(x)$ i oznaczamy ją symbolem $\int f(x)dx = F(x) + C$

(czytamy „całka $f(x)$ po dx ”), gdzie $F(x)$ oznacza dowolną funkcję pierwotną funkcji $f(x)$. Funkcję $f(x)$ nazywamy funkcją podcałkową, a liczbę C – stałą całkowania. Wyznaczenie funkcji pierwotnej nazywamy całkowaniem. Całkowanie jest działaniem odwrotnym do różniczkowania. Należy jednak podkreślić, że całkowanie jest trudniejsze od różniczkowania.

Twierdzenie

Każda funkcja ciągła w pewnym przedziale jest w tym przedziale całkowna.



Twierdzenie

a) $\left[\int f(x) dx \right]' = f(x)$; b) $\int f'(x) dx = f(x) + C$.

Twierdzenie

Założenie: istnieją funkcje pierwotne funkcji $f(x)$ i $g(x)$.

Teza:

a) czynnik stały można wyłączyć przed znak całki $\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx \quad k \in R$

b) całka sumy równa się sumie całek $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

2. Metody całkowania

Całkowanie przez części

Jeżeli funkcje $f, g \in C^1(X_p)$ to $\int f'(x)g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x)g'(x)dx$

Całkowanie przez podstawianie (metoda zamiany zmiennych).

Jeżeli funkcja f jest całkowna w przedziale (a, b) i funkcja $x = g(t) \in C^1((\alpha, \beta))$ oraz $\alpha < g(t) < \beta$ to $\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)dt$.

3. Całkowanie funkcji wymiernych

Funkcją wymierną nazywamy iloraz dwóch wielomianów.

Jeżeli $F_n(x), G_m(x)$ są wielomianami stopnia n i m , gdzie $n < m$ wówczas funkcję $\frac{F_n(x)}{G_m(x)}$ nazywamy funkcją wymierną właściwą, jeżeli natomiast $n \geq m$, to funkcję tę nazywamy funkcją wymierną niewłaściwą.

Funkcję wymierną niewłaściwą przedstawiamy w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej:

$$\frac{F_n(x)}{G_m(x)} = H_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{G_m(x)} \quad (k < m)$$

Funkcję wymierną właściwą rozkładamy na sumę ułamków prostych, tzn. funkcji wymiernych postaci:

$$\frac{A_n}{(x-a)^n}, \quad \frac{A_n x + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}, \quad n \in N \text{ gdzie } \Delta = b^2 - 4ac < 0$$



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Całkowania ułamków prostych

$$1. \quad \int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \ln|x-a| + C,$$

$$2. \quad \int \frac{A_n dx}{(x-a)^n} = \frac{A_n}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C, \quad n > 1$$

Literatura: **P1.** Roz. V, § 5.1.1-5.1.4; **P2.** Roz. VIII; **R.** Roz. X, § 10.1.



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

WII2 CAŁKOWANIE FUNKCJI NIWYMIERNYCH I TRYGNOMETRYCZNYCH

1. Całkowanie funkcji niewymiernych
2. Całkowanie funkcji trygonometrycznych

1. Niech $R(u, v)$ oznacza funkcję wymierną zmiennych u, v .

$$1. \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \quad ad - bc \neq 0.$$

Podstawienie (sprowadzamy całkę do całki funkcji wymiernej) $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t.$

$$2. \int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$$

Podstawienia Eulera (na ogół nieefektywne, prowadzące do skomplikowanych całek funkcji wymiernych)

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \begin{cases} \sqrt{a} x \pm t, & a > 0 \\ xt + \sqrt{c}, & c > 0 \\ t(x - x_1), & \Delta > 0 \end{cases}$$

x_1 – jeden z pierwiastków trójmianu $ax^2 + bx + c$.

Przypadki szczególne

$$3. \int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx, \text{ podstawienie } \sqrt{f(x)} = t.$$

$$4. \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

Sprowadzamy trójmian $ax^2 + bx + c$ do postaci kanonicznej i otrzymujemy całki typu:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{\alpha^2 - t^2}} = \arcsin \frac{t}{|\alpha|} + C \quad \text{lub} \quad \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + k}} = \ln \left| t + \sqrt{t^2 + k} \right| + C.$$

$$5. \int \frac{(Ax+B)dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2 + bx + c}} \text{ podstawiamy } x - \alpha = \frac{1}{t}$$



2. Całkowanie funkcji trygonometrycznych

Całkę postaci $\int R(\sin x, \cos x)dx$, gdzie R jest funkcją wymierną zmiennych $\sin x, \cos x$ możemy zawsze sprowadzić do całki funkcji wymiernej stosując podstawienie (uniwersalne)

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

Wówczas $\sin x, \cos x, dx$ są funkcjami wymiernymi zmiennej t

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Przypadki szczególne

1. Jeżeli $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ (R jest funkcją nieparzystą względem $\sin x$), podstawiamy: $\cos x = t$.
2. Jeżeli $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ (R jest funkcją nieparzystą względem $\cos x$), podstawiamy: $\sin x = t$.
3. Jeżeli $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ (R jest funkcją nieparzystą względem $\sin x$ i $\cos x$ jednocześnie), podstawiamy: $\operatorname{tg} x = t$.

Literatura: **P1.** Roz. V, § 5.1.5, 5.1.6; **P2.** Roz. VIII.



WII 3

CAŁKA OZNACZONA

1. Definicja całki oznaczonej
2. Podstawowe własności całki oznaczonej

1. Definicja całki oznaczonej (wg Riemanna)

Niech f będzie funkcją określoną i ograniczoną w przedziale domkniętym $\langle a, b \rangle$. Dokonujemy podziału Δ_n przedziału $\langle a, b \rangle$ (w sposób dowolny) na n podprzedziałów $\langle x_{i-1}, x_i \rangle, (i=1, 2, \dots, n)$ o długościach $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Następnie wybieramy (dowolnie) punkty pośrednie $\xi_i \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ oraz tworzymy sumę σ_n (sumę całkową) $\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$

Ciąg podziałów (Δ_n) przedziału $\langle a, b \rangle$ nazywamy **normalnym** ciągiem podziałów, jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0, \text{ gdzie } \delta_n = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i.$$

Jeżeli ciąg (σ_n) jest zbieżny do tej samej granicy, dla każdego ciągu podziałów normalnych (Δ_n) , niezależnie od wyboru punktów pośrednich ξ_i , to funkcję $f(x)$ nazywamy całkowną w przedziale $\langle a, b \rangle$, a granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$ nazywamy całką oznaczoną funkcji $f(x)$

w granicach od a do b i oznaczony symbolem $\int_a^b f(x) dx$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

a – dolna granica całkowania, b – górna granica całkowania.

Ponadto przyjmujemy, że $\int_a^a f(x) dx = 0$ oraz $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.

2. Podstawowe własności całki oznaczonej.

1. $\int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx, \quad A \in \mathbb{R}$
2. $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$



3.
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4. Jeżeli $f(x) \leq g(x)$ dla $x \in \langle a, b \rangle$, to
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

5. Jeżeli $f(x)$ jest funkcją ciągłą dla $x \in \langle a, b \rangle$, to istnieje $\xi \in \langle a, b \rangle$ takie, że
$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$
 (twierdzenie o wartości średniej)

6. Jeżeli $f(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale $\langle a, b \rangle$ oraz $F(x)$ jest dowolną funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ w tym przedziale ($F'(x) = f(x)$), wówczas

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b \quad (\text{podstawowy wzór rachunku całkowego – wzór}$$

Newtona - Leibniza)

7. Wzór na całkowanie przez części dla całki oznaczonej

Jeżeli $f(x), g(x) \in C^1(\langle a, b \rangle)$ to

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

8. Jeżeli $f(x)$ jest funkcją ciągłą w przedziale $\langle a, b \rangle$ oraz

$x = \varphi(t) \in C^1(\langle \alpha, \beta \rangle)$, gdzie $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, ponadto $\varphi(t) \in \langle a, b \rangle$ gdy $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, wówczas

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \quad (\text{zamiana zmiennych w całce oznaczonej})$$

Literatura: **P1.** Roz. V, § 5.2.1, 5.2.2; **P2.** Roz. X; **R.** Roz. X, § 10.2.



WII 4

CAŁKI NIEWŁAŚCIWE

1. Całka niewłaściwa I rodzaju
2. Całka niewłaściwa II rodzaju

1. Całka niewłaściwa I rodzaju

1.1. Funkcja f jest określona i ograniczona dla $x \in \langle a, b \rangle$

$$\text{oraz } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty (-\infty), \text{ wówczas } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx.$$

1.2. Funkcja f jest określona i ograniczona dla $x \in \langle a, b \rangle$

$$\text{oraz } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty (-\infty), \text{ wówczas } \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx.$$

2. Całka niewłaściwa II rodzaju

2.1. Funkcja f jest określona i ograniczona dla $x \in \langle a, \infty \rangle$, wówczas $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx$.

2.2. Funkcja f jest określona i ograniczona dla $x \in \langle -\infty, b \rangle$, wówczas

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{B \rightarrow -\infty} \int_B^b f(x) dx.$$

2.3. Funkcja f jest określona i ograniczona dla $x \in \langle -\infty, \infty \rangle$

$$\text{Wówczas } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Całki niewłaściwe nazywamy zbieżnymi, gdy istnieją skończone granice definiujących je całek oznaczonych. Całki niewłaściwe, które nie są zbieżne, nazywamy całkami rozbieżnymi.

Literatura: **P1**. Roz. V, § 5.2.3.



WII 5

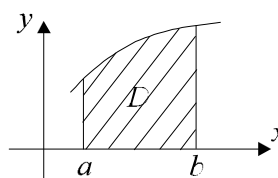
ZASTOSOWANIA GEOMETRYCZNE CAŁKI OZNACZONEJ

1. Pole figury płaskiej
2. Długość łuku krzywej płaskiej
3. Objętość bryły obrotowej
4. Pole powierzchni obrotowej

1. Pole figury płaskiej (rys. 1)

a) $y = f(x), \quad f(x) \geq 0, \quad x \in \langle a, b \rangle$
 $D: \quad a \leq x \leq b$
 $0 \leq y \leq f(x)$

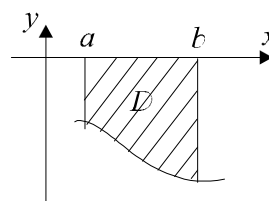
$$|D| = \int_a^b f(x) dx$$



Rys. 1

b) $y = f(x), \quad f(x) \leq 0, \quad x \in \langle a, b \rangle$ (rys.2)
 $D: \quad a \leq x \leq b$
 $f(x) \leq y \leq 0$

$$|D| = -\int_a^b f(x) dx$$



Rys. 2

2. Długość łuku krzywej płaskiej

Niech $|\Gamma|$ oznacza długość łuku krzywej płaskiej Γ .

1. Krzywa Γ określona jest równaniem $y = f(x)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$, $f(x) \in C^1(\langle a, b \rangle)$



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

2. Krzywa Γ określona jest w postaci parametrycznej, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\varphi, \psi \in C^1(\langle \alpha, \beta \rangle)$

$$|\Gamma| = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt.$$

3. Objętość bryły obrotowej

1. Objętość $|V|$ bryły utworzonej przez obrót dokoła osi Ox krzywej Γ określonej równaniem $y = f(x)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$, $f(x) \geq 0$, $f \in C(\langle a, b \rangle)$:

$$|V| = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

2. Objętość $|V|$ bryły utworzonej przez obrót dokoła osi Ox krzywej Γ określonej w postaci parametrycznej $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$, gdzie $\psi(t) \geq 0$, $\varphi, \psi \in C^1(\langle \alpha, \beta \rangle)$:

$$|V| = \pi \int_{\alpha}^{\beta} [\psi(t)]^2 \cdot |\varphi'(t)| dt.$$

4. Pole powierzchni obrotowej

1. Pole powierzchni $|P|$ bryły utworzonej przez obrót dokoła osi Ox krzywej Γ określonej równaniem $y = f(x)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \in C^1(\langle a, b \rangle)$:

$$|P| = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} f(x) dx.$$

2. Pole powierzchni $|P|$ bryły utworzonej przez obrót dokoła osi Ox krzywej Γ określonej w postaci parametrycznej $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$, gdzie $\varphi, \psi \in C^1(\langle \alpha, \beta \rangle)$, φ jest funkcją monotoniczną, natomiast $\psi(t) \geq 0$ dla $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$



$$|P| = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} \cdot \psi(t) dt .$$

Literatura: **P1.** Roz. V, § 5.2.2; **P2.** Roz. XI.

WII 6

FUNKCJE WIELU ZMIENNYCH

1. Funkcja dwóch zmiennych
2. Granica i ciągłość funkcji dwóch zmiennych

1. Funkcja dwóch zmiennych

Niech Z oznacza zbiór punktów $P(x, y)$ płaszczyzny.

Funkcją dwóch zmiennych ($z = f(x, y)$) x, y określoną w zbiorze Z nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi $P(x, y) \in Z$ dokładnie jednej liczby $z \in R$ (R – zbiór liczb rzeczywistych) $f: Z \rightarrow R$

Litery x, y nazywamy argumentami (zmiennymi niezależnymi) z nazywamy wartością funkcji (zmienna zależna), f jest symbolem funkcji, zbiór Z nazywamy dziedziną funkcji. Jeżeli dziedzina funkcji f nie jest podana, wówczas przyjmujemy, że jest nią zbiór wszystkich punktów $P(x, y)$ (par liczb x, y), dla których wzór $f(x, y)$ ma sens (dziedzina naturalna).

2. Granica funkcji dwóch zmiennych

Definicje granicy funkcji

1. Definicja granicy funkcji dwóch zmiennych według Cauchy’ego

Zakładamy, że funkcja $z = f(x, y)$ jest określona w zbiorze D oraz $P_0(x_0, y_0) \in D$ jest punktem skupienia zbioru D .

Liczbę g nazywamy granicą (podwójną) funkcji $f(x, y)$ w punkcie P_0 , jeżeli dla dowolnej (każdej) liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba $\delta > 0$, że dla każdego punktu $P(x, y)$ należącego do sąsiedztwa S_0 punktu P_0 o promieniu δ spełniona jest nierówność $|f(x, y) - g| < \varepsilon$.



$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = g \Leftrightarrow \begin{matrix} \wedge \\ \delta > 0 \end{matrix} \begin{matrix} \vee \\ \varepsilon > 0 \end{matrix} \begin{matrix} \wedge \\ P(x, y) \in D \end{matrix}$$

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - g| < \varepsilon$$

2. Zbieżność ciągu punktów

Ciąg punktów $(P_n(x_n, y_n))$ jest zbieżny do punktu $P_0(x_0, y_0)$, jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$.
Oznaczamy $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0$.

3. Definicja granicy funkcji dwóch zmiennych według Heinego

Liczbę g nazywamy granicą (podwójną) funkcji $f(P) = f(x, y)$ w punkcie $P_0(x_0, y_0)$, jeżeli dla każdego ciągu punktów $(P_n(x_n, y_n))$ $P_n \in D$, $P_n \neq P_0$ zbieżnego do P_0 , odpowiadający mu ciąg wartości funkcji $(f(P_n)) = (f(x_n, y_n))$ jest zbieżny do g .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = g \Leftrightarrow \begin{matrix} \wedge \\ (P_n), P_n \neq P_0 \end{matrix} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = g$$

Definicje granicy funkcji według Cauchy'ego i Heinego są równoważne.

3. Ciągłość funkcji

Funkcję $f(x, y)$ nazywamy ciągłą w punkcie $P_0(x_0, y_0)$, jeżeli $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, P_0 należy do dziedziny funkcji.

Literatura: **P1.** Roz. VI, § 6.1, 6.2; **P2.** Roz. XVA.



WII 7 **POCHODNE CZĄSTKOWE. POCHODNE CZĄSTKOWE WYŻSZYCH RZĘDÓW**

1. Pochodne cząstkowe
2. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

1. Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

Niech funkcja $f(x, y)$ będzie określona w otoczeniu U_0 punktu $P_0(x_0, y_0)$ oraz $P_1(x_0 + \Delta x, y_0)$, $P_2(x_0, y_0 + \Delta y) \in U_0$.

1. Jeżeli istnieje granica właściwa $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$

to nazywamy ją pochodną cząstkową rzędu pierwszego funkcji $f(x, y)$ względem x w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ i oznaczamy symbolem

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \text{ lub } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{bądź} \quad f'_x(x_0, y_0)$$

2. Jeżeli istnieje granica właściwa $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$

to nazywamy ją pochodną cząstkową rzędu pierwszego funkcji $f(x, y)$ względem zmiennej y w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ i oznaczamy symbolem

$$\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \text{ lub } \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{bądź} \quad f'_y(x_0, y_0)$$

W praktyce przy obliczaniu (wyznaczaniu) pochodnych cząstkowych korzystamy ze wzorów na pochodne funkcji jednej zmiennej, zakładając, że druga zmienna jest parametrem (stałą).



2. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu pochodnych $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ nazywamy pochodnymi cząstkowymi rzędu drugiego funkcji $f(x, y)$.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}$$

Pochodne f''_{yx} i f''_{xy} nazywamy pochodnymi mieszanymi drugiego rzędu. Jeżeli f''_{yx} i f''_{xy} są ciągłe w obszarze D to są sobie równe (twierdzenie Schwarzera).

Pochodnymi cząstkowymi rzędu n nazywamy pochodne cząstkowe pochodnych rzędu $n-1$.

Funkcję $f(x, y)$ nazywamy funkcją klasy C^n w zbiorze D ($f \in C^n(D)$), jeżeli ma ona w zbiorze D ciągłe pochodne cząstkowe do rzędu n włącznie.

Literatura: **P1.** Roz. VI, § 6.3.1, 6.3.2; **P2.** Roz. XV B.



WII 8

RÓŻNICZKA ZUPEŁNA. WZÓR TAYLORA.

1. Różniczka zupełna
2. Różniczki zupełne wyższych rzędów
3. Wzór Taylora

1. Różniczka zupełna

Dana jest funkcja $z = f(x, y)$ mająca pochodne cząstkowe w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ oraz punkt $P(x, y)$. Punkty P_0, P należą do dziedziny funkcji f .

Przyrostem funkcji f w punkcie P_0 dla przyrostu argumentów $\Delta x, \Delta y$ nazywamy wyrażenie $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, gdzie $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$.

Wyrażenie $d_x f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x$ nazywamy różniczką cząstkową funkcji f względem x w punkcie P_0 dla przyrostu argumentu Δx , analogicznie wyrażenie $d_y f = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$ nazywamy różniczką cząstkową funkcji f względem y w punkcie P_0 .

Sumę różniczek cząstkowych funkcji f w punkcie P_0 nazywamy różniczką zupełną i oznaczamy symbolem $df(x_0, y_0)$ (lub df)

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$$

gdzie $dx = \Delta x = x - x_0, dy = \Delta y = y - y_0$ są różniczkami zupełnymi argumentów x, y .

Różniczką zupełną funkcji n zmiennych $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nazywamy wyrażenie

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)dx_i$$



gdzie $dx_i = \Delta x_i = x_i - x_{0i}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Dla małych przyrostów argumentów Δx , Δy zachodzi następująca równość przybliżona $\Delta f \approx df$.

Stąd otrzymujemy wzór na przybliżone obliczanie wartości funkcji

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$$

gdzie $\Delta x = x - x_0 \approx 0$, $\Delta y = y - y_0 \approx 0$.

2. Różniczki zupełne wyższych rzędów

Zakładamy, że $f \in C^2(D)$

Różniczką zupełną drugiego rzędu funkcji $f(d^2 f)$ nazywamy różniczkę zupełną różniczki zupełnej tej funkcji

$$d^2 f = d(df) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$$

2.2. Zakładamy, że $f \in C^n(D)$

Różniczką zupełną rzędu n funkcji $f(d^n f)$ nazywamy różniczkę zupełną różniczki zupełnej rzędu $n-1$ tej funkcji

$$d^n f = d(d^{n-1} f), \quad n = 2, 3, \dots \quad d^n f = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k} \partial y^k} dx^{n-k} dy^k$$

Zapis symboliczny (analogia do dwumianu Newtona)

$$d^n f = \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right)^{(n)}$$

gdzie symbol (n) oznacza pochodną cząstkową n rzędu (odpowiednik n potęgi w dwumianie Newtona).

3. Wzór Taylora

Zakładamy, że funkcja $z = f(x, y)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe w otoczeniu U_0 punktu $P_0(x_0, y_0)$ oraz punkt $P(x, y) \in U_0$. Wówczas istnieje punkt



$P_1(x_0 + \theta x, y_0 + \theta y) \in U_0$, $0 < \theta < 1$ taki, że

$$f(P) = f(P_0) + \frac{df(P_0)}{1!} + \frac{d^2 f(P_0)}{2!} + \dots + \frac{d^{n-1} f(P_0)}{(n-1)!} + \frac{d^n f(P_1)}{n!},$$

gdzie różniczki zupełne obliczane są dla przyrostów $dx = x - x_0$, $dy = y - y_0$.

Dla $n = 2$ wzór Taylora jest postaci

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + \theta x, y_0 + \theta y)dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta x, y_0 + \theta y)dx dy + \right. \\ & \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + \theta x, y_0 + \theta y)dy^2 \right) \end{aligned}$$

W przypadku gdy punkt $P_0(0,0)$, wzór Taylora nazywamy wzorem Maclaurina. Dla $n = 1$ wzór Taylora nazywa się wzorem Lagrange'a o przyrostach skończonych.

Literatura: **P1. Roz. VI, § 6.3.3.**



WII 9	<i>EKSTREMA FUNKCJI DWÓCH ZMIENNYCH</i>
1. Ekstrema lokalne funkcji 2. Wartość największa i najmniejsza funkcji	
1. Ekstrema lokalne funkcji. 1. Warunek konieczny istnienia ekstremum Jeżeli funkcja $f(x, y)$ ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ i ma w tym punkcie ekstremum, to $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0.$ Punkt P_0 nazywamy wówczas punktem stacjonarnym (punktem krytycznym) funkcji $f(x, y)$. 2. Warunek konieczny i dostateczny istnienia ekstremum Zakładamy, że funkcja $f(x, y)$ ma w otoczeniu U_0 punktu $P_0(x_0, y_0)$ ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu. Niech $W(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$ Funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie $P_0(x, y_0)$ ekstremum, jeżeli spełnione są warunki 1) $\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0$	



$$2) \quad W(P_0) > 0.$$

Ponadto, jeżeli $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) > 0$ (lub $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) > 0$) to funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ minimum, jeżeli $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) < 0$ (lub $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) < 0$), to funkcja $f(x, y)$ ma w punkcie P_0 maksimum. Jeżeli $W(P_0) < 0$, to funkcja $f(x, y)$ nie ma ekstremum w punkcie $P_0(x_0, y_0)$. Jeżeli $W(P_0) = 0$, wówczas funkcja $f(x, y)$ może mieć ekstremum w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ lub nie (należy np. badać znak przyrostu wartości funkcji w otoczeniu punktu P_0 (definicja)).

2. Wartość największa i najmniejsza funkcji

Funkcja $f(x, y)$ ciągła w obszarze domkniętym i ograniczonym $\bar{D} = D \cup \Gamma$ (Γ – brzeg obszaru \bar{D}) przyjmuje wartość największą i wartość najmniejszą (ekstremum absolutne) w tym obszarze

Sposób znajdowania wartości największej i wartości najmniejszej

- Znajdujemy punkty stacjonarne leżące wewnątrz obszaru D (nie musimy badać istnienia ekstremum w tych punktach) oraz obliczamy wartości funkcji $f(x, y)$ w tych punktach.
- Wyznaczamy najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x, y)$ na brzegu Γ obszaru \bar{D} (badanie przebiegu zmienności funkcji jednej zmiennej).
- Porównujemy otrzymane w a), b) wartości. Największa (najmniejsza) z nich jest wartością największą (najmniejszą) w całym obszarze \bar{D} .

Literatura: **P1.** Roz. VI, § 6.4.1, 6.4.2; **P2.** Roz. XVC, D.



WII 10	CAŁKI WIELOKROTNE
<p>1. Całka podwójna 2. Całka potrójna</p>	
<p>1. Całka podwójna. Definicja</p> <p>Niech $f(x, y)$ będzie funkcją ciągłą w obszarze domkniętym \bar{D}. Obszar \bar{D} dzielimy w sposób dowolny na n obszarów częściowych $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ o polach $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$. Niech d_i oznacza średnicę obszaru σ_i (największą z cięciw) oraz $\delta_n = \max_{1 \leq i \leq n} d_i$, δ_n nazywamy średnicą podziału Δ_n obszaru \bar{D}. Ciąg podziałów Δ_n obszaru \bar{D} nazywamy normalnym ciągiem podziałów, jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$.</p> <p>Tworzymy sumę $S_n = \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta\sigma_i$ nazywaną sumą całkową.</p> <p>Jeżeli dla każdego normalnego ciągu podziałów obszaru \bar{D} ciąg sum całkowych (S_n) jest zbliżony do tej samej granicy właściwej, niezależnej od wyboru punktów P_i, to granicę tę nazywamy całką podwójną funkcji $f(x, y)$ w obszarze \bar{D} i oznaczamy symbolem</p> $\iint_D f(x, y) d\sigma \text{ lub } \iint_D f(x, y) dx dy, \text{ czyli } \iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \delta_n \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i.$	
<p>2. Całka potrójna</p> <p>Definicja całki potrójnej jest analogiczna jak definicje całki oznaczonej i całki podwójnej. Całkę potrójną oznaczamy symbolem</p> $\iiint_V f(x, y, z) dV \quad \text{lub} \quad \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$	



Zamiana całki potrójnej na całkę iterowaną

Przestrzenny obszar domknięty \bar{V}_x określony nierównościami

$$a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x), \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)$$

gdzie α, β są funkcjami ciągłymi dla $x \in \langle a, b \rangle$ oraz φ, ψ są funkcjami ciągłymi w obszarze \bar{D} opisanym dwiema pierwszymi nierównościami, nazywamy obszarem normalnym względem płaszczyzny OXY .

Analogicznie określamy obszary normalne względem płaszczyzn OXZ, OYZ .

Jeżeli funkcja $u = f(x, y, z)$ jest ciągła w obszarze \bar{V}_x , to

$$\iiint_{\bar{V}_x} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left\{ \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left[\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right\} dx$$

Literatura: P2. Roz. XVI, XVII.



WII 11	CAŁKI KRZYWOLINIOWE
<p>1. Całka krzywoliniowa nieskierowana 2. Całka krzywoliniowa skierowana 3. Twierdzenie Greena</p>	
<p>1. Całka krzywoliniowa nieskierowana. Definicja</p> <p>Niech funkcja $z = f(x, y)$ będzie określona na krzywej regularnej $\Gamma: x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Przedział $\langle \alpha, \beta \rangle$ dzielimy na n podprzedziałów $\langle t_{i-1}, t_i \rangle$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Wówczas długość Δs_i i-tego łuku częściowego krzywej Γ</p> $\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$ <p>Wybieramy punkty pośrednie $\xi_i \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle$ oraz tworzymy sumę σ_n:</p> $\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i, \text{ gdzie } x_i = \varphi(\xi_i), y_i = \psi(\xi_i)$ <p>Jeżeli ciąg (σ_n) jest zbieżny do tej samej granicy, dla każdego ciągu podziałów krzywej Γ, niezależnie od wyboru punktów ξ_i, to granicę tę nazywamy całką krzywoliniową nieskierowaną (pierwszego rodzaju) po krzywej Γ i oznaczamy symbolem $\int_{\Gamma} f(x, y) ds$ tzn.</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i = \int_{\Gamma} f(x, y) ds$ <p>Związek między całką krzywoliniową a całką oznaczoną</p>	



1. Jeżeli funkcja $z = f(x, y)$ jest ciągła na krzywej regularnej

$$\Gamma: x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \langle \alpha, \beta \rangle, \text{ wówczas } \int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t), \psi(t)] \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$$

2. Jeżeli funkcja $z = f(x, y)$ jest ciągła na krzywej

$$\Gamma: y = g(x), g(x) \in C^1(\langle a, b \rangle), \text{ wówczas } \int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f[x, g(x)] \cdot \sqrt{1 + [g'(x)]^2} dx$$

2. Całka krzywoliniowa skierowana. Definicja

Zakładamy, że dany jest otwarty łuk zwykły skierowany L o przedstawieniu parametrycznym $x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ zgodnym z kierunkiem tego łuku. Ponadto dane są funkcje $P(x, y), Q(x, y)$ określone w każdym punkcie łuku L . Analogicznie jak całkę oznaczoną definiujemy całkę krzywoliniową skierowaną pary funkcji $[P(x, y); Q(x, y)]$ po łuku L i oznaczamy symbolem $\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$.

Zamiana całki krzywoliniowej skierowanej na całkę oznaczoną.

Jeżeli funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ są ciągłe na łuku L spełniającym podane założenia, wówczas całka krzywoliniowa istnieje oraz

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{ P[\varphi(t), \psi(t)] \varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)] \psi'(t) \} dt$$

Całkę krzywoliniową po krzywej zamkniętej Jordana Γ skierowanej dodatnio (ujemnie) względem swego wnętrza oznaczamy (odpowiednio)

$$\oint_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \quad \text{lub} \quad \oint_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

3. Twierdzenie (wzór) Greena

Jeżeli funkcje $P(x, y), Q(x, y) \in C^1$ w obszarze normalnym \bar{D} (względem osi Ox, Oy) oraz brzeg Γ jest skierowany dodatnio względem wnętrza obszaru, wówczas

$$\oint_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Niezależność całki krzywoliniowej skierowanej od drogi całkowania.



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Zakładamy, że funkcje $P(x, y)$, $Q(x, y)$ spełniają założenia twierdzenia Greena.

Całka krzywoliniowa skierowana $\int_{\widehat{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ nie zależy od drogi całkowania \widehat{AB}

(zależy tylko od punktów A i B) wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ w obszarze D.

Literatura: **P2. Roz. XVIII.**

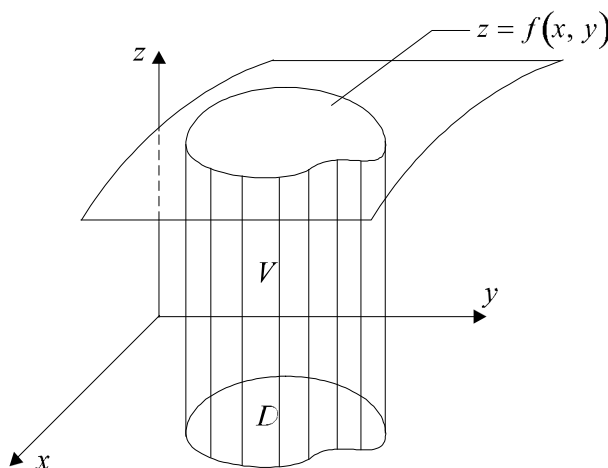
WII 12

**ZASTOSOWANIA GEOMETRYCZNE CAŁEK WIELOKROTNYCH I
KRZYWOLINIOWYCH**

1. Interpretacja geometryczna całki podwójnej
2. Zastosowania całki potrójnej do obliczania objętości bryły
3. Interpretacja geometryczna całki krzywoliniowej nieskierowanej.
4. Zastosowanie całki krzywoliniowej skierowanej do obliczania pola figury płaskiej.

1. Interpretacja geometryczna całki podwójnej

Jeżeli funkcja $f(x, y)$ jest ciągła w obszarze D oraz $f(x, y) \geq 0$, wówczas całka podwójna $\iint_D f(x, y)d\sigma$ jest objętością $|V|$ bryły V o podstawie D, ograniczonej powierzchnią będącą wykresem funkcji $z = f(x, y)$ oraz powierzchnią walcową (rys. 1).



Rys. 1

Jeżeli $f(x, y) \equiv 1$ dla $(x, y) \in D$, wówczas $\iint_D d\sigma$ przedstawia pole $|D|$ obszaru D.

2. Zastosowania całki potrójnej do obliczania objętości bryły



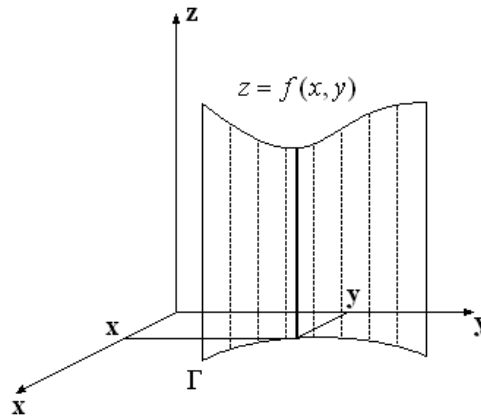
Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Jeżeli $f(x, y, z) \equiv 1$ dla $P(x, y, z) \in \bar{V}_x$, to całka potrójna $\iiint_{V_x} dx dy dz$ jest objętością obszaru \bar{V}_x .

3. Interpretacja geometryczna całki krzywoliniowej nieskierowanej

a) Jeżeli $f(x, y) = 1$ całka krzywoliniowa przedstawia długość łuku Γ : $|\Gamma| = \int_{\Gamma} ds$.

b) Jeżeli funkcja f jest ciągła na łuku Γ i $f(x, y) > 0$ to $\int_{\Gamma} f(x, y) ds$ przedstawia z definicji część pola powierzchni walcowej (rys. 2).



Rys. 2

4. Zastosowanie całki krzywoliniowej skierowanej do obliczania pola figury płaskiej.

Jeżeli Γ jest brzegiem obszaru normalnego względem osi O_x, O_y \bar{D} , skierowanego dodatnio względem niego, to pole $|D|$ tego obszaru wyraża się wzorem $|D| = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -y dx + x dy$.

Literatura: P2. Roz. XVI, XVII, XVIII.



WII 13	SZEREGI LICZBOWE
<p>1. Szereg liczbowy 2. Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych 3. Szereg naprzemienny 4. Szereg o wyrazach dowolnych</p>	
<p>1. Szereg liczbowy</p> <p>Dany jest ciąg (a_n), $a_n \in R$. Niech $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$, $n \in N$.</p> <p>Ciąg (S_n) nazywamy szeregiem liczbowym i oznaczamy symbolem</p> $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ <p>Jeżeli $\lim S_n = \lim(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = S$, $S \in R$ to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy zbieżnym, a liczbę S nazywamy sumą szeregu.</p> <p>Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nie jest zbieżny, to nazywamy go szeregiem rozbieżnym.</p> <p>Warunek konieczny zbieżności szeregu</p> <p>Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.</p>	
<p>2. Kryteria zbieżności szeregów o wyrazach nieujemnych</p> <p>1. Kryterium d'Alemberta</p> <p>Jeżeli $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n > 0$) jest zbieżny, gdy $q < 1$, natomiast rozbieżny, gdy</p>	



$q > 1$, jeżeli $q = 1$ kryterium d'Alemberta nie rozstrzyga o zbieżności $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. Kryterium Cauchy'ego

Jeżeli $\lim \sqrt[n]{a_n} = q$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ($a_n \geq 0$) jest zbieżny, gdy $q < 1$, natomiast rozbieżny, gdy

$q > 1$, jeżeli $q = 1$ kryterium Cauchy'ego nie rozstrzyga o zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. Kryterium porównawcze

Jeżeli $0 \leq a_n \leq b_n$, dla $n > n_0$, $n, n_0 \in \mathbb{N}$, to

a) ze zbieżności $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

b) z rozbieżności $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika rozbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

4. Kryterium całkowe

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest malejąca i dodatnia dla $x \in \langle n_0, \infty \rangle$ oraz $f(n) = a_n$ dla

$n \geq n_0$, $n, n_0 \in \mathbb{N}$, to $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny (rozbieżny) wtedy i tylko wtedy, gdy $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$ jest zbieżna (rozbieżna).

3. Szereg naprzemienny

Szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ $a_n > 0$ nazywamy szeregiem naprzemiennym.

Kryterium Leibniza zbieżności szeregu naprzemiennego

Jeżeli (a_n) jest nierosnący i $\lim a_n = 0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ jest zbieżny.

4. Zbieżność bezwzględna (absolutna)

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy wówczas bezwzględnie zbieżnym, jeżeli natomiast $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

zbieżny, a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest rozbieżny, to nazywamy go warunkowo zbieżnym

Literatura: **P1.** Roz. VII, § 7.1; **P2.** Roz. XXII.

WII 14	SZEREGI FUNKCYJNE. SZEREG POTĘGOWY
<p>1. Ciąg funkcyjny 2. Szeregi funkcyjne. Zbieżność jednostajna 3. Szereg potęgowy. Promień zbieżności szeregu potęgowego.</p>	
<p>1. Ciąg funkcyjny</p> <p>Niech U_o oznacza nieparzysty podzbiór zbioru R ($U_o \subset R$). Ciągiem funkcyjnym $(f_n(x))$ w zbiorze U_o nazywamy przyporządkowanie każdej liczbie naturalnej dokładnie jednej funkcji określonej w U_o.</p> <p>$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots, x \in U_o$. Funkcję $f_n(x)$ nazywamy n-tym wyrazem ciągu $(f_n(x))$.</p> <p>Definicja granicy ciągu funkcyjnego</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigwedge_{x \in U_o} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{n > \delta} (f_n(x) - f(x) < \varepsilon)$ <p>Definicja jednostajnej zbieżności ciągu funkcyjnego $(f_n(x))$ do funkcji $f(x)$</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \underset{J}{=} f(x) \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta} \bigwedge_{x \in U_o} \bigwedge_{n > \delta} (f_n(x) - f(x) < \varepsilon)$ <p>(Symbol J pod znakiem równości oznacza zbieżność jednostajną).</p>	
<p>2. Szereg funkcyjny</p> <p>Dany jest ciąg funkcyjny $(f_n(x))$ dla $x \in U_o$.</p> <p>Ciąg $(S_n(x))$ o wyrazach $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$ nazywamy szeregiem funkcyjnym i oznaczamy symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ lub $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$</p>	



Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nazywamy zbieżnym w U_o jeżeli ciąg $(S_n(x))$ jest zbieżny w U_o .

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$, to funkcję $S(x)$ nazywamy sumą szeregu.

Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ jest zbieżny w U_o to $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nazywamy bezwzględnie zbieżnym w tym zbiorze.

Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$ to $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ nazywamy jednostajnie zbieżnym w U_o .

Kryterium jednostajnej zbieżności Weierstrassa

Jeżeli istnieje $m \in N$ taka, że dla każdego $n \geq m$, $n \in N$ i dla każdego $x \in U_o$ spełniona jest nierówność $|f_n(x)| \leq a_n$ oraz szereg liczbowy (majoranta szeregu funkcyjnego) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, wówczas szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie i bezwzględnie w zbiorze U_o .

Można wykazać, że jeżeli szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny w zbiorze U_o do funkcji $f(x)$ i jego składniki $f_n(x)$ są funkcjami ciągłymi w punkcie $x_o \in U_o$, to suma szeregu $f(x)$ jest funkcją ciągłą w punkcie x_o .

3. Szereg potęgowy

Szereg funkcyjny postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_o)^n$ nazywamy szeregiem potęgowym o środku x_o . Ciąg (a_n) nazywamy ciągiem współczynników. Dla $x_o = 0$ szereg potęgowy jest postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Liczbę $r \in R_+ \cup \{0\}$ taką, że $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest zbieżny dla $|x| < r$, a rozbieżny dla $|x| > r$, nazywamy promieniem zbieżności szeregu potęgowego.

Wzór na promień zbieżności

Jeżeli istnieje $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g$ lub $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = g$, to promień zbieżności r szeregu potęgowego

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ wyznaczamy ze wzoru



Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

$$r = \begin{cases} 0, & \text{gdy } g = +\infty, \\ \frac{1}{g}, & \text{gdy } 0 < g < +\infty, \\ +\infty, & \text{gdy } g = 0. \end{cases}$$

Literatura: **P1.** Roz. VII, § 7.2.1; **P2.** Roz. XXIII.

WII 15

SZEREG TAYLORA

1. Szereg Taylora
2. Zastosowania szeregu Taylora

1. Szereg Taylora

Zakładamy, że funkcja $f \in C^\infty(U_0)$, gdzie U_0 jest otoczeniem punktu x_0 .

Szeregiem Taylora dla funkcji f w otoczeniu U_0 nazywamy szereg potęgowy postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} = f(x_0) + \frac{f'(x_0)(x-x_0)}{1!} + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \dots$$

Szereg Taylora jest zbieżny do funkcji f (funkcja f jest sumą szeregu Taylora) dla tych wartości x , dla których $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, gdzie $R_n(x)$ jest resztą we wzorze Taylora.

Szczególnym przypadkiem szeregu Taylora jest szereg Maclaurina (dla $x_0 = 0$)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \dots$$

Przykłady rozwinięcia w szeregu Maclaurina wybranych funkcji.

1. $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

2. $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$

3. $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots$

4. $(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + \dots$ dla $x \in (-1, 1)$, $\alpha \leq -1$,



$$\begin{aligned}x &\in (-1, 1), & -1 < \alpha < 0, \\x &\in (-1, 1), & \alpha > 0.\end{aligned}$$

2. Zastosowanie szeregu Taylora

Szereg potęgowy danej funkcji, która jest jednocześnie szeregiem Taylora dla tej funkcji, możemy całkować i różniczkować „wyraz po wyrazie”.

Jeżeli x należy do wnętrza przedziału zbieżności szeregu potęgowego, wówczas:

$$1. \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad 2. \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Szereg dany oraz szeregi całek i pochodnych mają ten sam promień zbieżności.

Powyższe twierdzenia możemy stosować np. do całkowania funkcji, których pierwotne nie są funkcjami elementarnymi. W tym celu rozwijamy funkcję podcałkową w szereg Taylora (Maclaurina) i całkujemy „wyraz po wyrazie”. Szereg Taylora (Maclaurina) możemy stosować równanie do obliczania przybliżonej wartości funkcji z daną dokładnością. Rozwijamy funkcję f w szereg Taylora, następnie podstawiając $x = x_0$ (x_0 należy do wnętrza przedziału zbieżności szeregu) otrzymujemy szereg liczbowy zbieżny do $f(x_0)$. Obliczając przybliżoną wartość $f(x_0)$ bierzemy sumę tylu wyrazów szeregu liczbowego, aby otrzymać żadaną dokładność przybliżenia.

Literatura: **P1.** Roz. VII, § 7.2.2, 7.2.3; **P2.** Roz. XXIII.