Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Materiały dydaktyczne

Matematyka

Semestr II

Ćwiczenia

	Przedmiot:	**MATEMATYKA**									
Kierunek: Mechatronika **Rozkład zajęć w czasie studiów – Studia pierwszego stopnia**											
Semestr	Liczba tygodni w semestrze	Liczba godzin w tygodniu				Liczba godzin w semestrze					Punkty kredytowe
		W	Ć	L	S	Σ	W	Ć	L	S	
II	15	1	2	–	–	45	15	30	–	–	4

Związki z innymi przedmiotami:

– fizyka,
– mechanika techniczna,
– wytrzymałość materiałów,
– podstawy konstrukcji maszyn,
– elektrotechnika i elektronika,
– automatyka i robotyka,
– metrologia i systemy pomiarowe.

Zakres wiedzy do opanowania

Po wysłuchaniu wykładów przewidywanych programem oraz wykonaniu ćwiczeń student powinien:

Znać →

1) Definicje i podstawowe twierdzenia dotyczące zbioru liczb zespolonych, macierzy, wyznaczników i układów równań liniowych.
2) Rachunek wektorowy, równania płaszczyzny i prostej w przestrzeni R^3.
3) Definicje i podstawowe twierdzenia dotyczące wszechstronnego badania przebiegu zmienności funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.
4) Podstawowe zagadnienia dotyczące rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych.
5) Podstawy rachunku całkowego (całka nieoznaczona, całka oznaczona, całki niewłaściwe, całki wielokrotne i krzywoliniowe).
6) Kryteria zbieżności szeregów liczbowych, podstawowe twierdzenia dotyczące szeregów funkcyjnych.
7) Sposoby rozwiązywania wybranych typów równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego i drugiego rzędu.
8) Elementy rachunku prawdopodobieństwa, podstawy statystyki matematycznej.

Umieć →

1) Wykonywać działania na liczbach zespolonych i macierzach, obliczać wyznaczniki oraz rozwiązywać układy równań liniowych metodą macierzową, za pomocą wzorów Cramera oraz w oparciu o twierdzenie Kroneckera-Capellego.

2) Przeprowadzać wszechstronne badanie funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.
3) Wyznaczać całki nieoznaczone, obliczać całki oznaczone, podwójne, potrójne i krzywoliniowe, stosować rachunek całkowy w geometrii i przedmiotach technicznych.
4) Wyznaczać ekstrema lokalne i warunkowe funkcji wielu zmiennych, badać zbieżność szeregów liczbowych i funkcyjnych, rozwijać funkcje w szereg Taylora.
5) Rozwiązywać wybrane typy równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych pierwszego i drugiego rzędu.
6) Obliczać prawdopodobieństwo zdarzeń losowych, wyznaczać estymatory i przedziały ufności, stosować testy statystyczne do weryfikacji hipotez statystycznych.

Treść zajęć dydaktycznych

Nr tematu	Tematy i ich rozwinięcie	Liczba godzin				
		Razem	W	Ć	L	S
Semestr II						
1.	**Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej rzeczywistej**: wyznaczanie całek nieoznaczonych za pomocą metody całkowania przez części i metodą zamiany zmiennych, wyznaczanie całek funkcji wymiernych, niewymiernych i trygonometrycznych; obliczanie całek oznaczonych w oparciu o twierdzenie Newtona-Leibniza; obliczanie pól figur płaskich, objętości i pól powierzchni brył obrotowych, długości łuku krzywej płaskiej.	10	–	10	–	–
2.	**Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych**: wyznaczanie błędów wartości funkcji za pomocą różniczki zupełnej, obliczanie przybliżonych wartości funkcji, rozwijanie funkcji dwóch zmiennych według wzoru Taylora, obliczanie ekstremów lokalnych, globalnych i warunkowych funkcji dwóch zmiennych.	8	–	8	–	–
3.	**Rachunek całkowy funkcji wielu zmiennych**: obliczanie całek podwójnych i potrójnych w obszarach normalnych, obliczanie całek krzywoliniowych, obliczanie całek krzywoliniowych za pomocą wzoru Greena, obliczanie pól figur płaskich i objętości brył za pomocą całek wielokrotnych.	6	–	6	–	–
4.	**Szeregi liczbowe i funkcyjne**: badanie zbieżności szeregów liczbowych za pomocą kryteriów d'Alemberta, Cauchy'ego, Leibniza oraz kryteriów porównawczego i całkowego, obliczanie promieni i przedziałów zbieżności szeregów potęgowych, obliczanie całek nieelementarnych za pomocą rozwinięcia funkcji podcałkowych w szereg Taylora.	6	–	6	–	–
	Razem	30		30	–	–

I. Metody dydaktyczne

Przedmiot jest realizowany w formie wykładów i ćwiczeń rachunkowych na I i II roku studiów. Pomoce dydaktyczne stanowią:
- literatura podstawowa i uzupełniająca do wykładów i ćwiczeń rachunkowych,
- dzienniczki studentów.

II. Forma i warunki zaliczenia przedmiotu

II-1. Forma i warunki zaliczenia ćwiczeń rachunkowych

- obecność studenta na ćwiczeniach,
- uzyskanie pozytywnych ocen z 2 sprawdzianów pisemnych w ciągu semestru przeprowadzonych w terminach uzgodnionych ze studentami,
- zaliczenie z oceną.

CII 1	*CAŁKA NIEOZNACZONA*

1. Metody całkowania:
- całkowanie przez części
- całkowanie przez podstawianie
2. Całkowanie funkcji wymiernych

Całkowanie przed podstawienie (zamiana zmiennych)

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)dt \text{ , gdzie } x = g(t).$$

Przykład

a) $\int x\sqrt{x^2+1}dx$; b) $\int xe^{x^2}dx$.

Rozwiązanie

a) Podstawiamy $\sqrt{x^2+1} = t$, stąd $x^2+1 = t^2$ oraz $2xdx = 2tdt$, czyli $xdx = tdt$.

Otrzymujemy $\int x\sqrt{x^2+1}dx = \int \sqrt{x^2+1}xdx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}{3} + C$.

b) $\int xe^{x^2}dx = \left| \begin{matrix} x^2 = t \\ 2xdx = dt \\ xdx = \frac{dt}{2} \end{matrix} \right| = \int e^t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$.

Całkowanie funkcji wymiernych

Funkcje wymierne całkujemy stosując metodę podaną w [WII 1] (rozkład na sumę ułamków prostych).

Przykład

a) $\int \frac{x+1}{(x-1)(x+3)^2}dx$; b) $\int \frac{x^3+1}{x^2+x-2}dx$.

Rozwiązanie

a) Funkcję podcałkową rozkładamy na sumę ułamków prostych.

$\frac{x+1}{(x-1)(x+3)^2} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}$,

stąd $x+1\equiv (A+B)x^2+(6A+2B+C)x+9A-3B+C.$
Porównujemy współczynniki przy odpowiednich potęgach x:

$$\left.\begin{array}{l} x^2: A+B=0 \\ x^1: 6A+2B+C=1 \\ x^0: 9A-3B-C=1 \end{array}\right\}$$

Rozwiązując układ równań mamy: $A=\frac{1}{8}$, $B=-\frac{1}{8}$, $C=\frac{1}{2}$, więc

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x+3)^2}dx=\frac{1}{8}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{8}\int\frac{1}{x+3}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+3)^2}dx=\frac{1}{8}\ln|x-1|-\frac{1}{8}\ln|x+3|-\frac{1}{2(x+3)^2}+C=$$

$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|-\frac{1}{2(x+3)}+C.$$

b) $I=\int\frac{x^3+1}{x^2+x-2}dx=\int\left(x-1+\frac{3x-1}{x^2+x-2}\right)dx=\frac{x^2}{2}-x+\int\frac{3x-1}{x^2+x-2}dx=\frac{x^2}{2}-x+I_1$

$$I_1=\int\frac{3x-1}{x^2+x-2}dx=\int\frac{3x-1}{(x-1)(x+2)}dx\,.$$

Funkcję wymierną $\frac{3x-1}{(x-1)(x+2)}$ rozkładamy na sumę ułamków prostych:

$\frac{3x-1}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$, stąd po pomnożeniu przez $(x-1)(x+2)$ mamy
$3x-1=A(x+2)+B(x-1)$, czyli $3x-1=(A+B)x+2A-B$.
Porównujemy współczynniki przy odpowiednich potęgach x:

$\left.\begin{array}{l} x^1: A+B=3 \\ x^0: 2A-B=-1 \end{array}\right\}$ stąd $A=\frac{2}{3}, B=\frac{7}{3}$,

$$I_1=\int\frac{3x-1}{(x-1)(x+2)}dx=\int\frac{2dx}{3(x-1)}+\int\frac{7dx}{3(x+2)}=\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{7}{3}\ln|x+2|+C\,.$$

Ostatecznie $I=\frac{x^2}{2}-x+\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{7}{3}\ln|x+2|+C$

Zadania

1. Znaleźć podane całki nieoznaczone (całkowanie przez części):
a) $\int xe^{2x}dx$; b) $\int\sqrt{x}\ln x dx$; c) $\int x^2\sin x dx$.

2. Znaleźć podane całki nieoznaczone (metoda zamiany zmiennych):
a) $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; b) $\int\left(\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)\frac{dx}{x}$; c) $\int\sqrt[3]{1+2\sin x}\cos x dx$.

3. Znaleźć podane całki funkcji wymiernych:

a) $\int \frac{dx}{x^3 - x}$; b) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$; c) $\int \frac{(x^3+3)dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

Odpowiedzi:

1. a) $\frac{1}{2}\left(xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} \right) + C$; b) $\frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2) + C$; c) $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$.

2. a) $-2\cos\sqrt{x} + C$; b) $\frac{1}{2}\ln^2 x + \ln|\ln x| + C$; c) $\frac{3(1+2\sin x)^{\frac{4}{3}}}{8} + C$.

3. a) $-\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + C$; b) $\ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C$; c) $\frac{x+2}{2(x^2+1)} + 2arctgx + \ln\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^2+1}} + C$.

Literatura: Z. Roz. 4, § 1, 2, 3, 4.

C II 2	***CAŁKOWANIE FUNKCJI NIEWYMIERNYCH I TRYGONOMETRYCZNYCH***

1. Całkowanie funkcji niewymiernych.
2. Całkowanie funkcji trygonometrycznych

Całkowanie funkcji niewymiernych

Funkcje niewymierne całkujemy w oparciu o metody podane w [WII 2].

Przykład

Znaleźć podane całki nieoznaczone:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$; b) $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx$; c) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Rozwiązanie

a) Korzystamy ze wzoru $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+k}\right| + C$.

Sprowadzamy trójmian kwadratowy x^2+2x+3 do postaci kanonicznej:

$x^2+2x+3=(x+1)^2+2$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+2}} = \left|\begin{matrix} x+1=t \\ dx=dt \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2+2}\right| + C = \ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+}\right.$$

b) Stosujemy metodę współczynników nieoznaczonych.

$$I = \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx = a\sqrt{x^2+2x+5} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}.$$

Po zróżniczkowaniu obu stron otrzymujemy

$$\frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \frac{a(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+5}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+2x+5}},$$

stąd $x+2 \equiv ax+a+\lambda$, więc $a=1, \lambda=1$. Zatem

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+4}\right| + C.$$

Ostatecznie $I = \sqrt{x^2+2x+5} + \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C$.

c)

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \left|\begin{matrix} x=\sin t \\ dx=\cos t dt \end{matrix}\right| = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int \sqrt{\cos^2 t}\cos t dx = \int |\cos t| \cdot \cos t dt =$$

$$= \int \cos^2 t dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right) + C = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C$$

Całkowanie funkcji trygonometrycznych
Funkcje trygonometryczne całkujemy w oparciu o metody podane w [WII 2].

Przykład

Znaleźć podane całki nieoznaczone funkcji trygonometrycznych:

a) $\int \frac{dx}{\sin x}$; b) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$; c) $\int \cos 3x \cos 5x dx$.

Rozwiązanie

a) Stosujemy podstawienie uniwersalne [WII 2]

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{c} tg\frac{x}{2} = t \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

b) Funkcja podcałkowa jest nieparzysta względem $\sin x$, więc podstawiamy $\cos x = t$, $-\sin x dx = dt$.

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \cdot \sin x dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x dx = \int (1-t^2)t^2(-dt) =$$

$$= \int (t^4 - t^2)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

c) Korzystamy ze wzoru na sumę cosinusów: $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Mamy $\cos 3x \cos 5x = \frac{\cos 2x + \cos 8x}{2}$, stąd

$$\int \cos 3x \cos 5x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x + \cos 8x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 8x}{8}\right) + C.$$

Zadania

1. Znaleźć podane całki funkcji niewymiernych:

a) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}dx$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$; c) $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2}dx$; d) $\int \sqrt{x^2-2x-1}dx$.

2. Znaleźć podane całki funkcji trygonometrycznych:

a) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$; b) $\int \sin 2x \sin 5x dx$; c) $\int \sin^3 x dx$; d) $\int \frac{dx}{4+\sin^2 x}$.

Odpowiedzi

1. a) $-2\sqrt{\frac{x+1}{x}}+\ln\left|1+2x-2\sqrt{x^2+x}\right|+C$; b) $2\ln|x+3|+3\ln|x-3|+C$; c) $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|-\frac{\sqrt{2x+1}}{x}+C$; d) $\frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x-1}-\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-1}\right|+C$.

2. a) $\frac{1}{\cos x}-tgx+x+C$; b) $\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{8}\sin 4x+C$; c) $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$; d) $\frac{\sqrt{5}}{10}arctg\left(\frac{\sqrt{5}}{2}tgx\right)+C$.

Literatura: **Z**. Roz. 4, § 5, 6.

CII 3	*CAŁKI NIEWŁAŚCIWE*

1. Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju
2. Całki niewłaściwe drugiego rodzaju

Całki niewłaściwe obliczamy na podstawie definicji podanych w [WII 4].

Całki niewłaściwe pierwszego rodzaju.

Przykład

Obliczyć całki niewłaściwe pierwszego rodzaju: **a)** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln^2 x}$ **;** **b)** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2}$ **.**

Rozwiązanie

a) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_{1+\varepsilon}^{2} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left(-\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln(1+\varepsilon)}\right) = +\infty$, ponieważ

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\ln(1+\varepsilon)} = +\infty$, tak więc całka jest rozbieżna.

$$\int \frac{dx}{x\ln^2 x} = \left| \begin{matrix} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\ln x} + C .$$

b) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{1-x}\right)\Bigg|_0^{1-\varepsilon} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right) = +\infty$ **-** całka jest rozbieżna.

Całki niewłaściwe drugiego rodzaju.

Przykład

Obliczyć całki niewłaściwe drugiego rodzaju: **a)** $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$ **;** **b)** $\int\limits_{-\infty}^1 \frac{x}{x^2+2}dx$ **.**

Rozwiązanie

a) $$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{dx}{x^2+2x+5},$$

$$\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}=\left|\begin{array}{l}\frac{x+1}{2}=t\\ dx=2dt\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{2}arctgt+C=$$

$$=\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}+C.$$

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}\Bigg|_1^A=\frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\left(arctg\frac{A+1}{2}-arctg1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{8},$$

czyli całka jest zbieżna.

b) $\int_{-\infty}^{1}\frac{x}{x^2+2}dx=\lim_{B\to-\infty}\int_B^1\frac{x}{x^2+2}dx=\lim_{B\to-\infty}\frac{1}{2}\left[\ln 3-\ln\left(B^2+2\right)\right]=-\infty$**,** więc całka jest rozbieżna.

$$\int\frac{x}{x^2+2}dx=\left|\begin{array}{l}x^2+2=t\\ 2xdx=dt\\ xdx=\frac{dt}{2}\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+C,$$

$$\int_B^1\frac{x}{x^2+2}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2\right)\Big|_B^1=\frac{1}{2}\left[\ln 3-\ln\left(B^2+2\right)\right]$$

Zadania

1. Obliczyć całki niewłaściwe pierwszego rodzaju:

a) $\int_1^2\frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$**; b)** $\int_0^1 x^2\ln x dx$**; c)** $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$**.**

2. Obliczyć całki niewłaściwe drugiego rodzaju:

a) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+x}$**; b)** $\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$**; c)** $\int_0^{+\infty}x\sin x dx$**.**

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Odpowiedzi   1. a) $\frac{3}{2}$; b) $-\frac{1}{9}$; c) π. 2. a) $\ln 2$; b) $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$; c) rozbieżna.
Literatura: Z. **Roz. IV, § 9.**

CII 4	*ZASTOSOWANIA GEOMETRYCZNE CAŁKI OZNACZONEJ*

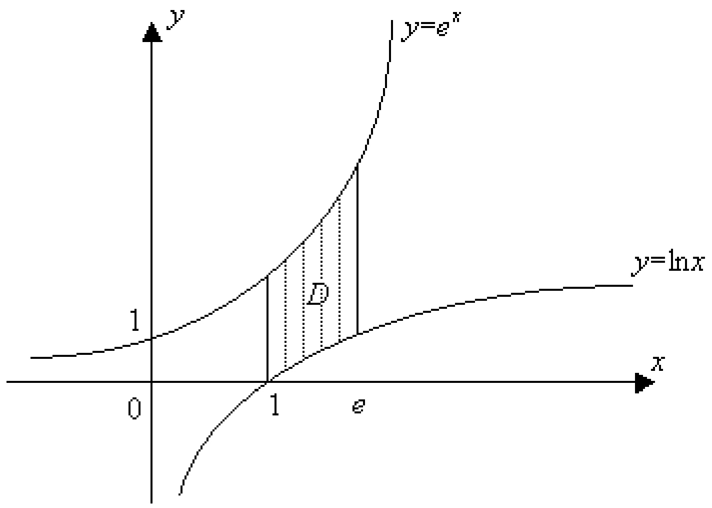
1. Pole figury płaskiej
2. Długość łuku
3. Objętość bryły obrotowej
4. Pole powierzchni bryły obrotowej

Pole figury płaskiej

Przykłady

1. Obliczyć pole obszaru ograniczonego liniami: $y = e^x$, $y = \ln x$, $x = 1$, $x = e$.

Rozwiązanie



Rys. 1

$$|D| = \int_1^e \left(e^x - \ln x\right)dx = \int_1^e e^x dx - \int_1^e \ln x dx . \quad \int_1^e e^x dx = e^x \Big|_1^e = e^e - e ,$$

$$\int_1^e \ln x dx = \left| \begin{matrix} f'(x)=1, & f(x)=x \\ g(x)=\ln x, & g'(x)=\frac{1}{x} \end{matrix} \right| = x\ln x \Big|_1^e - \int_0^1 x \cdot \frac{1}{x} dx = x\ln x \Big|_1^e - x\Big|_1^e =$$

$$= e\ln e - \ln 1 - (e-1) = e - e + 1 = 1.$$

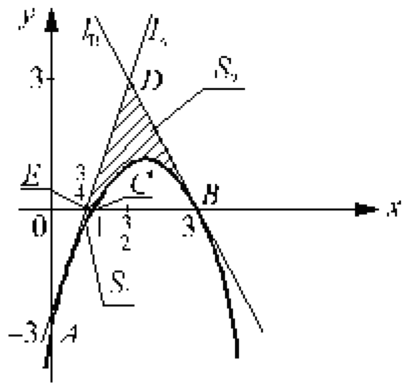
Ostatecznie $|D| = e^e - e - 1$.

2. Znaleźć pole figury zawartej między parabolą $y = -x^2 + 4x - 3$ i stycznymi do niej w punktach $A(0, -3)$ i $B(3, 0)$.

Rozwiązanie

Znajdujemy punkty przecięcia paraboli z osiami $0x$ i $0y$

$0x$: $y = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x = 3 \text{ lub } x = 1)$ Parabola przecina oś $0x$ w punktach $B(3, 0)$ oraz $C(1, 0)$; $0y$: $x = 0 \Rightarrow y = -3$. Parabola przecina oś $0y$ w punkcie $A(0, -3)$.



Rys. 2

Znajdujemy równania stycznych do paraboli w punktach A, B. $y - y_0 = f(x_0)(x - x_0)$

$y' = (-x^2 + 4x - 3)' = -2x + 4$

a) Równanie stycznej l_A w punkcie A: $f'(0) = 4$ więc l_A: $y = 4x - 3$.

b) Równanie stycznej l_B w punkcie B: $f'(3) = -2$ więc l_B: $y = -2x + 6$.

Pole S danej figury jest sumą pól S_1 i S_2 (rys. 2). Styczna l_A przecina oś $0x$ w punkcie $E\left(\frac{3}{4}, 0\right)$, ponadto styczne l_A i l_B przecinają się w punkcie $D\left(\frac{3}{2}, 3\right)$. Pole S_1 równa się różnicy pól trapezu krzywoliniowego $0AC$ i trójkąta prostokątnego $0AE$ $S_1 = S_{0AE} - S_{\Delta 0AE}$.

$$S_1 = -\int_0^1 \left(-x^2 + 4x - 3\right)dx - 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = -\left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right)\Bigg|_0^1 - \frac{9}{8} = \frac{5}{24}$$

Pole S_2 równa się różnicy pól trójkata EDB i trapezu krzywoliniowego ograniczonego daną parabolą dla $x \in \langle 1,\ 3 \rangle$

$S_2 = S_{\Delta EDB} - S_{EWB}$ (rys. 2)

$$S_2 = \left(3 - \frac{3}{4}\right) \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} - \int_1^3 \left(-x^2 + 4x - 3\right)dx = \frac{27}{8} - \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right)\Bigg|_1^3 = \frac{27}{8} - \frac{4}{3} = \frac{49}{24}$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{5}{24} + \frac{49}{24} = \frac{9}{4} \quad \text{[j.kw.]}$$

Długość łuku krzywej płaskiej

Przykład

Znaleźć długość łuku krzywej $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$, $a > 0$ $t \in < 0{,}2\pi >$ (kardioida).

Rozwiązanie

Krzywa Γ określona jest w postaci parametrycznej, $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ w przedziale $\langle \alpha, \beta \rangle$, $\varphi, \psi \in C^1(\langle \alpha, \beta \rangle)$ $\quad |\Gamma| = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt$.

Korzystamy z podanego wzoru

$x' = a(-2\sin t + 2\sin 2t)$, $y' = a(2\cos t - 2\cos 2t)$, $(x')^2 = 4a^2(\sin^2 t - 2\sin t \sin 2t + \sin^2 2t)$,

$(y')^2 = 4a^2(\cos^2 t - 2\cos t \cos 2t + \cos^2 2t)$,

$$(x')^2 + (y')^2 = 4a^2\left[(\sin^2 t + \cos^2 t) - 2(\sin t \sin 2t + \cos t \cos 2t) + (\sin^2 2t + \cos^2 2t)\right] =$$
$$= 4a^2[1 - 2\cos(2t - t) + 1] = 4a^2(2 - 2\cos t) = 8a^2(1 - \cos t) = 8a^2 \cdot 2\sin^2 \frac{t}{2} = 16a^2 \sin^2 \frac{t}{2}.$$

$$|\Gamma| = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{16a^2 \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = 4a \int\limits_0^{2\pi} \left|\sin \frac{t}{2}\right| dt = 4a \int\limits_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt = 4a\left(-2\cos \frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = -8a(\cos \pi - \cos 0) =$$

$$= -8(-1 - 1) = 16a.$$

Objętość bryły obrotowej

Przykład

Obliczyć objętość bryły utworzonej przez obrót dokoła osi OX wykresu funkcji:

$f(x) = \ln x$ przedziale $< 1, e >$;

Rozwiązanie

Objętość $|V|$ bryły utworzonej przez obrót dokoła osi $0x$ krzywej Γ określonej równaniem $y = f(x)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$, $f(x) \geq 0$, $f \in C(\langle a, b \rangle)$: $|V| = \pi \int\limits_a^b [f(x)]^2\, dx$.

$$|V| = \pi\int_1^e \ln^2 x dx = \left| \begin{matrix} \ln x = t, x = e^t \\ dx = e^t dt \\ x = 1, t = 0 \\ x = e, t = 1 \end{matrix} \right| = \pi\int_0^1 t^2 e^t dt = \pi\left(t^2 e^t - 2te^t + 2e^t\right)\Big|_0^1 = \pi(e-2).$$

$$\int t^2 e^t dt = \left| \begin{matrix} f'(t) = e^t, & f(t) = e^t, \\ g(t) = t^2, & g'(t) = 2t \end{matrix} \right| = t^2 e^t - 2\int te^t dt = t^2 e^t - 2\left(te^t - e^t\right) + C.$$

$$\int te^t dt = \left| \begin{matrix} f'(t) = e^t, & f(t) = e^t, \\ g(t) = t, & g'(t) = 1 \end{matrix} \right| = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C,$$

Pole powierzchni bryły obrotowej

Przykład

Obliczyć pole powierzchni kuli utworzonej przez obrót dookoła osi OX łuku okręgu $x^2 + y^2 = R^2, \quad R > 0, \quad 0 \le x \le R$.

Rozwiązanie

Pole powierzchni $|P|$ bryły utworzonej przez obrót dokoła osi $0x$ krzywej Γ określonej równaniem $y = f(x)$ w przedziale $\langle a, b\rangle,\ f(x) \ge 0,\ f(x) \in C^1(\langle a, b\rangle)$:

$$|P| = 2\pi\int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, f(x) dx.$$

$x^2 + y^2 = R^2$, stąd $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ dla $y \ge 0$ i $x \in <0, R>$, $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$

$$|P| = 2 \cdot 2\pi\int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} dx = 4\pi\int_0^R \sqrt{\frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2}} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} dx =$$

$$= 4\pi\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} \cdot \sqrt{R^2 - x^2} dx = 4\pi R\int_0^R dx = 4\pi R\, x\Big|_0^R = 4\pi R^2 \quad [j^3].$$

Zadania

1. Obliczyć pole figury zawartej między osiami współrzędnych a krzywą $y = \ln x$ w przedziale $<0,1>$
2. Obliczyć długość łuku paraboli półsześciennej o równaniu $y^2 = x^3$ w przedziale $<0,5>$.

3. Obliczyć objętość beczki powstałej przez obrót dookoła osi OX łuku elipsy $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ dla $x \in <-2,2>$.

4. Obliczyć pole powierzchni P pasa kulistego powstałego przez obrót dookoła osi OX łuku okręgu $x^2+y^2=R^2$ dla $x \in <x_1, x_2>, -R < x_1 < x_2 < R.$

Odpowiedzi

1. 1; 2. $\frac{335}{27}$; 3. $\frac{368}{27}\pi$; 4. $2\pi R(x_2-x_1)$.

Literatura: Z. Roz. IV, § 10.

CII 5	***GRANICA FUNKCJI DWÓCH ZMIENNYCH***

Definicja granicy funkcji dwóch zmiennych (wg Heinego)

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=g \Leftrightarrow \bigwedge_{(P_n),\, P_n\neq P_0} \qquad \lim_{n\to\infty} P_n = P_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(P_n)=g$$

Przykład

Wykazać, że nie istnieje grania funkcji $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2}$.

Rozwiązanie

Wykażemy, że granica funkcji nie istnieje na podstawie definicji granicy według Heinego.

Rozpatrzmy ciąg punktów $P_n\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$: $\quad \lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0(0,0)$, gdyż $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Wówczas $\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n^2}}{\frac{2}{n^2}}=1$. Następnie rozpatrzmy ciąg punktów

$$P_n'\left(0,\frac{1}{n}\right),\ \lim_{n\to\infty} P_n'\left(0,\frac{1}{n}\right)=P_0(0,0), \qquad \lim_{n\to\infty} f(P_n')=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 0\cdot\frac{1}{n}}{0^2+\frac{1}{n^2}}=0.$$

Ponieważ dla dwóch różnych ciągów punktów P_n i P_n' odpowiadające im ciągi wartości funkcji $f(P_n)$ i $f(P_n')$ dążą do dwóch różnych granic, więc granica funkcji nie istnieje.

Przykład

Wyznaczyć granice funkcji:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}}\frac{y^3-x^3}{y-x}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 3}}\left(1+\frac{y}{x}\right)^x$.

Rozwiązanie

a) Korzystamy z definicji Heinego. Bierzemy dowolny ciąg punktów $(P_n(x_n,y_n))$ taki, że $P_n\neq P_o(0,0)$ i $\lim P_n = P_o$.

Stąd $\lim f(P_n) = \lim \dfrac{y_n^{\,3} - x_n^{\,3}}{y_n - x_n} = \lim\left(y_n^{\,2} + y_n x_n + x_n^{\,2}\right) = 12$, zatem $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} \dfrac{y^3 - x^3}{y - x} = 12$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 3}} \left(1 + \dfrac{y}{x}\right)^x = \lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to 2}} \left[\left(1 + \dfrac{1}{\frac{x}{y}}\right)^{\frac{x}{y}}\right]^y = e^3$, ponieważ $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = e$.

Zadania

Wyznaczyć granice funkcji:

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3 - y^3}{x - y}$; b) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \dfrac{x^2 y}{xy + 5}$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x + 3y)\sin\dfrac{2}{y}$.

Odpowiedzi

a) 0; b) $\dfrac{4}{7}$; c) 0

Literatura: Z. Roz. VI, § 1-3.

CII 6	***POCHODNE CZĄSTKOWE***

1. Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu

Przykłady

1. Na podstawie definicji [WII6] wyznaczyć pochodne cząstkowe funkcji $z=f(x,y)=x^2\sqrt{y}$ w punkcie $P_0(x_0,y_0)$ $\quad (x_0\in R, y_0>0)$.

Rozwiązanie

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2\sqrt{y_0}-x_0^{\ 2}\sqrt{y_0}}{\Delta x}=\sqrt{y_0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^{\ 2}}{\Delta x}=\sqrt{y_0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^{\ 2}+2x_0\Delta x+\Delta}{\Delta x}$$

$$\sqrt{y_0}\lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x)=\sqrt{y_0}\cdot 2x_0=2x_0\sqrt{y_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{x_0^{\ 2}\sqrt{y_0+\Delta y}-x_0^{\ 2}\sqrt{y_0}}{\Delta y}=x_0^{\ 2}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{y_0+\Delta y}-\sqrt{y_0}}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\left(\sqrt{y_0+\Delta y}-\sqrt{y_0}\right)\left(\sqrt{y_0}\right.}{\Delta y\left(\sqrt{y_0+\Delta y}+\right.}$$

$$=x_0^{\ 2}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{y_0+\Delta y-y_0}{\Delta y\left(\sqrt{y_0+\Delta y}+\sqrt{y_0}\right)}=x_0^{\ 2}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\sqrt{y_0+\Delta y}+\sqrt{y_0}}=\frac{x_0^{\ 2}}{\sqrt{y_0}+\sqrt{y_0}}=\frac{x_0^{\ 2}}{2\sqrt{y_0}}$$

2. Wyznaczyć pochodne cząstkowe funkcji:

a) $z=y^x$; b) $z=y^{\frac{x}{y}}$.

Rozwiązanie

a) Wyznaczając pochodne cząstkowe traktujemy funkcję z jako funkcję jednego argumentu (tego względem, którego wyznaczamy pochodną).

$\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$, (pochodna funkcji wykładniczej) , $\frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1}$. (pochodna funkcji potęgowej)

b) $\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=y^{\frac{x}{y}}\ln y\cdot\frac{1}{y}=y^{\frac{x}{y}-1}\ln y$ (ze wzoru na pochodną funkcji wykładniczej)

Aby wyznaczyć pochodną cząstkową względem y (pochodna logarytmiczna) logarytmujemy obie strony, a następnie różniczkujemy względem y.

$$\ln z=\ln y^{\frac{x}{y}}, \ln z=\frac{x}{y}\ln y,\quad \frac{1}{z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\cdot\ln y+\frac{x}{y}\cdot\frac{1}{y}.$$

Następnie mnożymy obustronnie przez z i otrzymujemy

$$\frac{\partial z}{\partial y}=z\left(\frac{x}{y^2}-\frac{x\ln y}{y^2}\right)=y^{\frac{x}{y}}\left(\frac{x}{y^2}-\frac{x\ln y}{y^2}\right).$$ Ostatecznie $$\frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=xy^{\frac{x}{y}-2}(1-\ln y).$$

2. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów

Wyznaczyć pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji $z=y^x$

Rozwiązanie

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=y^x\ln y,\frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=xy^{x-1},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=z''_{xx}\left(y^x\ln y\right)\ln y=y^x\ln^2 y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(xy^{x-1}\right)\ln y+y^x\frac{1}{y}=xy^{x-1}\ln y+y^{x-1}=y^{x-1}(x\ln y+1),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z''_{yy}=x(x-1)y^{x-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=z''_{xy}=1\cdot y^{x-1}+x\cdot y^{x-1}\ln y=y^{x-1}(1+x\ln y).$$

Oczywiście $z''_{yx}=z''_{xy}$ (twierdzenie Schwarza).

Zadania

1. Na podstawie definicji wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji $z=f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}$ w punkcie $P_0(x_0,y_0)$.

2. Wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji:

a) $z=\dfrac{arctgy}{1+x^2}$; b) $z=\arcsin(xy^2)$; c) $z=[\sin(xy)]^y$.

3. Wyznaczyć pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji:

a) $z=\sin^2(3x-4y)$; b) $z=y^2e^x$; c) $z=x^{\ln y}$

Odpowiedzi

2. a) $z'_x=-2x\dfrac{arctgx}{(1+x^2)^2}, z'_y=\dfrac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$; b) $z'_x=\dfrac{y^2}{\sqrt{1-x^2y^4}}, z'_y=\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2y^4-1}}$; c)

$z'_x=y^2\cos(xy)\cdot[\sin(xy)]^{y-1}, z'_y=[\sin(xy)]^y[\ln(\sin(xy))+xyctg(xy)].$

2. a) $z''_{xx}=18\cos 2(3x-4y), z''_{yy}=32\cos 2(3x-4y), z''_{xy}=-24\cos 2(3x-4y)$. b) $z''_{xx}=y^2e^x, z''_{yy}=2e^x, z''_{xy}=2ye^x$; c) $z''_{xx}=\ln y(\ln y-1)x^{\ln y-2}, z''_{yy}=\frac{x^{\ln y}\ln x}{y^2}\left(x^{\ln y}\ln x-1\right)$, $z''_{xy}=\frac{x^{\ln y-1}}{y}(1+\ln x\ln y)$.
Literatura: **Z**. Roz. VI, § 4, 8.

CII 7	***RÓŻNICZKA ZUPEŁNA. RÓŻNICZKI ZUPEŁNE WYŻSZYCH RZĘDÓW***

1. Różniczka zupełna funkcji dwóch zmiennych

Różniczkę zupełną wyznaczamy na podstawie definicji podanej w [WII8].

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy\,,$$

przy założeniu, że istnieją pochodne cząstkowe funkcji f w punkcie $P_0(x_0, y_0)$.

Przykłady

1. Obliczyć różniczkę zupełną funkcji $z = f(x, y) = e^{xy}$ w punkcie $P_0(1,1)$, gdy $dx = 0,2$, $dy = 0,15$.

Rozwiązanie

Wyznaczamy funkcję różniczkę zupełną:

$$dz = df(x, y) = ye^{xy}dx + xe^{xy}dy\,.\ \text{Stąd}\ df(1,1) = e \cdot 0,2 + e \cdot 0,15 = 0,35e\,.$$

2. Obliczyć przybliżoną wartość liczby $1,09^{3,98}$.

Rozwiązanie

Dana liczba jest wartością funkcji $f(x, y) = x^y$ w punkcie $P(1,09;3,98)$.
Przyjmujemy $x_0 = 1$, $y_0 = 4$, $\Delta x = 1,09 - 1 = 0,09$, $\Delta y = 3,98 - 4 = -0,02$, ponadto $f(x_0, y_0) = f(1,4) = 1$. Wyznaczamy pochodne cząstkowe funkcji $f(x, y)$ oraz ich wartości w punkcie $P_0(1,4)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln x\,, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,4) = 4\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,4) = 0\,.$$

$$1,09^{3,98} \approx 1 + 4 \cdot 0,09 + 0 \cdot (-0,02) = 1,36\,.$$

2. Zastosowanie różniczki zupełnej w rachunku błędów.

Przykład

Objętość V stożka jest funkcją długości promienia podstawy R i wysokości H.
Wyznaczyć błąd względny objętości δV, jeżeli błędy względne δR i δH są dane.

Rozwiązanie

Korzystamy ze wzorów podanych w [WII8].

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Maksymalny błąd bezwzględny Δ_V objętości wynosi:

$\Delta_V = \left|\frac{\partial V}{\partial R}\right|\Delta R + \left|\frac{\partial V}{\partial H}\right|\Delta H$, gdzie ΔR, ΔH oznaczają błędy bezwzględne wielkości *R*, *H*,

$\frac{\partial V}{\partial H} = \frac{1}{3}\pi R^2$, więc $\Delta V \approx \frac{2}{3}\pi R H \Delta R + \frac{1}{3} R^2 \Delta H$,

Błąd względny objętości $\delta V = \frac{\Delta V}{V}$, błędy względne wielkości R oraz H są równe odpowiednio $\delta R = \frac{\Delta R}{R}$, $\delta H = \frac{\Delta H}{H}$. Stąd mamy

$$\delta V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\frac{2}{3}\pi R H}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} \cdot \Delta R + \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 \Delta H}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} = 2\frac{\Delta R}{R} + \frac{\Delta H}{H} = 2\delta R + \delta H$$

Różniczki zupełne wyższych rzędów

Różniczki zupełne wyższych rzędów wyznaczamy w oparciu o wzory podane w [WII8].

Przykład

Wyznaczyć różniczkę zupełną drugiego rzędu funkcji $f(x, y) = e^{xy}$.

Rozwiązanie

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{2\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

Pochodne cząstkowe II rzędu wyznaczamy na podstawie definicji podanych w [WII7]

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = ye^{xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = xe^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = y^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = x^2 e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{xy} = e^{xy} + ye^{xy} \cdot x = e^{xy}(1+xy)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = e^{xy} + xe^{xy} \cdot y = e^{xy}(1+xy).$$

Więc $d^2 f = y^2 e^{xy} dx^2 + 2e^{xy}(1+xy)dxdy + x^2 e^{xy} dy^2$.

Zadania

1. Obliczyć różniczkę zupełną funkcji $f(x,y) = x^3 y^2$ w punkcie $P_0(1,2)$ przyjmując $dx = 0{,}1$, $dy = 0{,}3$.

2. Wyznaczyć różniczkę zupełną $d^2 f$ funkcji $f(x,y) = x \ln y$.

3. Objętość V ostrosłupa ściętego o wysokości H i podstawach, których pola są równe P i Q oblicza się ze wzoru $V = \frac{1}{6}\left(P + \sqrt{PQ} + Q\right)H$. Oszacować błąd względny ∂V objętości V, jeżeli błędy względne pomiarów P, Q, H wynoszą odpowiednio $\delta P, \delta Q, \delta H$.

Odpowiedzi

1. $2{,}H$; 2. $d^2 f = \frac{2}{y} dxdy - \frac{x}{y^2} dy^2$

$$dV = \frac{H}{6}\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q}{P}}\right)\delta P + \frac{H}{6}\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{Q}}\right)\delta Q + V\frac{\delta H}{H}$$

Literatura: **Z**. Roz. VI, § 6, 8.

CII 8	***EKSTREMA FUNKCJI DWÓCH ZMIENNYCH***

1. Ekstrema lokalne

Ekstrema lokalne znajdujemy korzystając z twierdzenia podanego w [WII9].

Przykład

Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji
$f(x,y) = z = x^3 - 6xy + 3y^2$.

Rozwiązanie

1. Wyznaczamy punkty stacjonarne funkcji f

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6y - 6x.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \text{ czyli } \begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 6y - 6x = 0 \end{cases}, \text{ stąd } \begin{matrix} x_1 = 0, & y_1 = 0, \\ x_2 = 2, & y_2 = 2. \end{matrix}$$

Punkty stacjonarne: $P_1(0,0), P_2(2,0)$.

2. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6$, $W(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix}$

Następnie obliczamy wartość wyróżnika W w punktach P_1, P_2.

$W(P_1) = W(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$, więc funkcja f nie ma ekstremum w punkcie P_1.

$W(P_2) = W(2,2) = \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} = 36 > 0$, więc w punkcie $P_2(2,0)$ funkcja f ma ekstremum lokalne.

Z nierówności $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(P_2) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2,2) = 12 > 0$, wynika, że jest to minimum lokalne.

$x_{\min} = 2,\ y_{\min} = 0, z_{\min} = f(2,0) = 8, P_{\min}(2,0,8).$

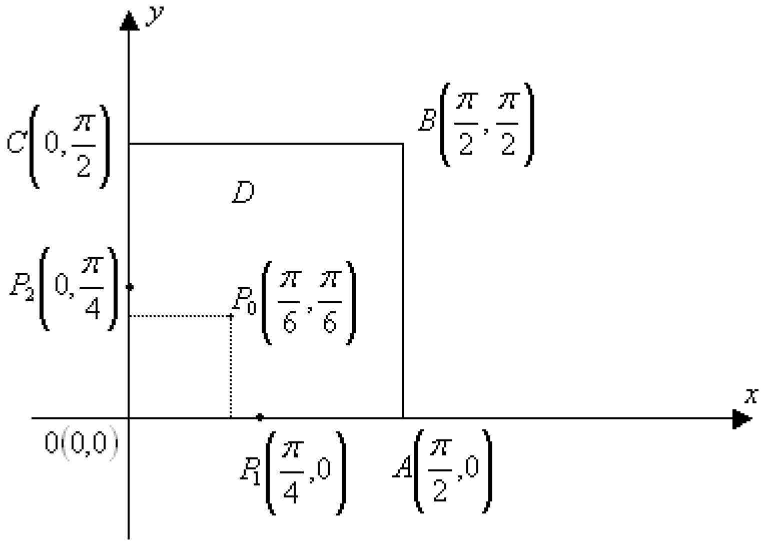
2. Ekstrema globalne (wartość najmniejsza i wartość największa).

Sposób znajdowania ekstremów globalnych pokazano w [WII9].

Przykład

Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $z = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$ w obszarze $D = \left\{(x,y): 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$.

Rozwiązanie



Rys.1

Wyznaczamy punkty stacjonarne leżące wewnątrz obszaru D.

$z'_x = \cos x - \sin(x+y)$, $\quad z'_y = \cos y - \sin(x+y)$

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin(x+y) = 0 \\ \cos y - \sin(x+y) = 0 \end{cases}, \text{ stąd}$$

$\cos x = \cos y$, więc $x = y$ dla $(x,y) \in D$ oraz $\cos x - \sin 2x = 0$ czyli

$\cos x - 2\sin x \cos x = 0$, $\cos x(1 - 2\sin x) = 0$; $\cos x = 0$ lub $\sin x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ (nie jest punktem wewnętrznym D),

$x=\frac{\pi}{6}$, $y=\frac{\pi}{6}$. Jedynym punktem stacjonarnym wewnętrznym należącym do zbioru D jest więc punkt $P_0\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$. Obliczamy wartość funkcji z w punkcie P_0 oraz w wierzchołkach kwadratu D tj. w punktach $0(0,0)$, $A\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $B\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, $C\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$: $z(O)=z(0,0)=1$

$z(P_0)=z\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$,

$z(A)=z\left(\frac{\pi}{2},0\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\sin 0+\cos\frac{\pi}{2}=1$,

$z(B)=z\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}+\cos\pi=1$,

$z(C)=z\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=\sin 0+\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=1$.

Następnie wyznaczamy punkty, w których funkcja z może mieć ekstrema znajdujące się na brzegu kwadratu D.

$\overline{OA}: 0<x<\frac{\pi}{2}$, $y=0$,

$z=\sin x+\cos x$, $z'_x=\cos x-\sin x$,

$z'_x=0$ gdy $\cos x=\sin x$ stąd $x=\frac{\pi}{4}$.

Otrzymaliśmy punkt $P_1\left(\frac{\pi}{4},0\right)$. Obliczamy wartość funkcji z w punkcie P_1.

$z(P_1)=z\left(\frac{\pi}{4},0\right)=\sqrt{2}$.

$\overline{AB}: x=\frac{\pi}{2}$, $0<y<\frac{\pi}{2}$, $z=1+\sin y+\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)$;

stąd $z=1+\sin y-\sin y=1$ (funkcja stała).

$\overline{CB}: 0<x<\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{2}$, $z=1+\sin x+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $z=1+\sin x-\sin x=1$ (funkcja stała).

$\overline{OC}: x=0$, $0<y<\frac{\pi}{2}$, $z=\sin y+\cos y$,

$z'_y=\cos y-\sin y$, $z'_y=0$ gdy $\cos y=\sin y$, stąd $y=\frac{\pi}{4}$. Otrzymaliśmy punkt $P_2\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

Obliczamy wartość funkcji z w punkcie P_2. $z(P_2)=z\left(0,\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$.

Ostatecznie funkcja przyjmuje w kwadracie D wartość najmniejszą równą 1 na boku $\overline{AB}$ oraz w wierzchołku C, natomiast wartość największą równą $\frac{3}{2}$ w punkcie wewnętrznym P_0.

Zadania

1. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji:

a) $f(x,y)=e^{4x-x^2-y^2}$; b) $f(x,y)=e^{\frac{y}{2}}\left(x^2+y\right)$

2. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x,y)=4x^2+y^2+2x-y$ w obszarze ograniczonym elipsą $4x^2+y^2=1$.

Odpowiedzi

1. a) $P_{\max}\left(2,0,e^4\right)$; b) $P_{\min}\left(0,-2,-\frac{2}{e}\right)$.

2. $M=1+\sqrt{2}$ w punkcie $\left(\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $m=-\frac{1}{2}$ w punkcie $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

Literatura: Z. **Roz. VI, § 10.**

CII 9	*CAŁKI WIELOKROTNE*

1. Całka podwójna
2. Całka potrójna

1. **Całka podwójna**

Przykład

Obliczyć całki podwójne funkcji $z = f(x,y)$ w obszarze ograniczonym liniami:

a) $f(x,y) = \dfrac{y^3}{x^2}$, $y = x^3$; b) $f(x,y) = xy$, $y^2 = 4x+4$, $y = 2x-2$;

c) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \le 4$.

Rozwiązanie

a) Obszar D ograniczony danymi krzywymi jest obszarem normalnym względem osi O_x

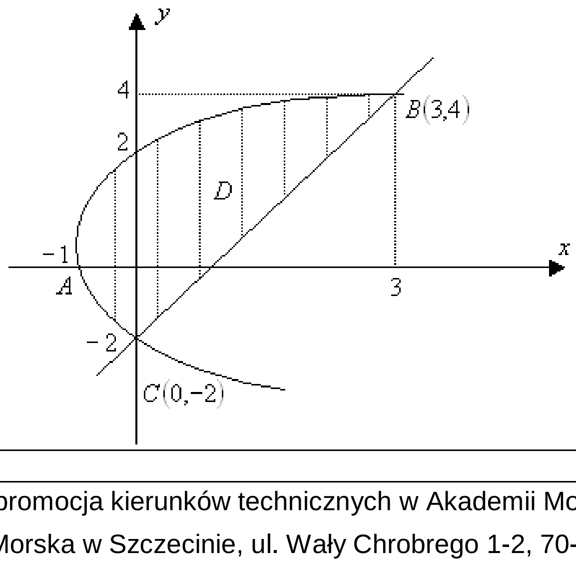
$$D: 0 \le x \le 1, \qquad x^3 \le y \le x^2.$$

Zamieniamy całkę podwójną na całkę iterowaną.

$$\iint_D \frac{y^3}{x^2}\,dxdy = \int_0^1\left(\int_{x^3}^{x^2}\frac{y^3}{x^2}\,dy\right)dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2}\cdot\frac{y^4}{4}\Bigg|_{x^3}^{x^2}dx = \int_0^1\frac{1}{x^2}\left(\frac{x^8}{4}-\frac{x^{12}}{4}\right)dx = \frac{1}{4}\int_0^1\left(x^6 - x^{10}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{x^7}{7}-\frac{x^{11}}{11}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right) = \frac{1}{77}.$$

b) Rozwiązując układ równań $\begin{cases} y^2 = 4x+4 \\ y = 2x-2 \end{cases}$ wyznaczamy współrzędne punktów B i C (rys. 1)



Rys. 1

Obszar całkowania D_y zawarty między łukiem paraboli $x=\frac{y^2-4}{4}$ oraz odcinkiem prostej $x=\frac{y+2}{2}$ normalny względem osi OY jest opisany nierównościami:

$$D_y:\ \frac{y^2-4}{4}\le x\le\frac{y+2}{2},\ -2\le y\le 4.$$

Zamieniamy całkę podwójną na całkę iterowaną:

$$\iint\limits_{D_y} xydxdy=\int_{-2}^{4}\left(\int_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{y+2}{2}} xydx\right)dy=\int_{-2}^{4}\frac{yx^2}{2}\Bigg|_{\frac{y^2-4}{4}}^{\frac{y+2}{2}}dy=\int_{-2}^{4}\frac{y}{2}\left[\left(\frac{y+2}{2}\right)^2-\left(\frac{y^2-4}{4}\right)^2\right]dy=$$

$$=\frac{1}{32}\int_{-2}^{4}\left(-y^5+12y^3+16y^2\right)dy=\frac{1}{32}\left(-\frac{y^6}{6}+3y^4+\frac{16y^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{4}=13\frac{1}{2}.$$

c) Dokonamy zamiany zmiennych x,y zmiennymi r,φ: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ (r,φ - współrzędne biegunowe punktu (x,y)).

Jakobian przekształcenia

$$I(r,\varphi)=\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r.$$

Obszar D (koło o środku w początku układu współrzędnych i promieniu 2) jest obrazem prostokąta Δ: $0\le r\le 2$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

$$\iint\limits_{D}\sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy=\iint\limits_{\Delta}\sqrt{4-r^2\cos^2\varphi-r^2\sin^2\varphi}\ rdrd\varphi=\iint\limits_{\Delta}\sqrt{4-r^2}\ rdrd\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2\sqrt{4-r^2}\,rdr\right)d\varphi,$$

$$\int\sqrt{4-r^2}\,rdr=\left|\begin{matrix}\sqrt{4-r^2}=t, 4-r^2=t^2,\\ rdr=-tdt\end{matrix}\right|=-\int t^2dt=-\frac{t^3}{3}+C=-\frac{\sqrt{\left(4-r^2\right)^3}}{3}+C,$$

$$\int_0^2 \sqrt{4-r^2}\,r dr = -\frac{\sqrt{\left(4-r^2\right)^3}}{3}\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{8}{3} d\varphi = \frac{8}{3}\varphi \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{16\pi}{3}, \text{ więc } \iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy = \frac{16\pi}{3}.$$

2. **Całka potrójna**

Przykład

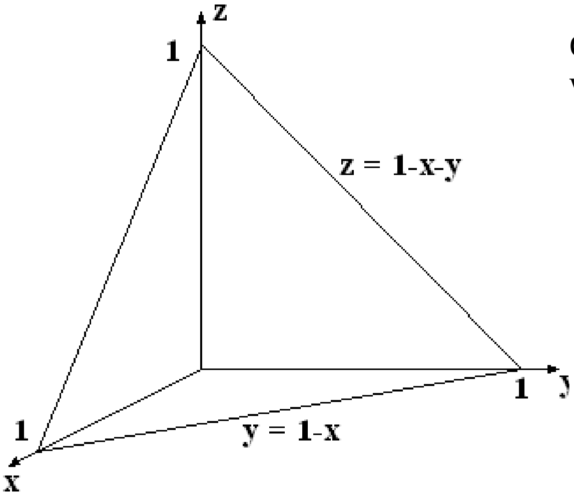
Obliczyć całki potrójne:

a) $\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, Ω jest czworościanem ograniczonym płaszczyznami $x=0, y=0.z=0, x+y+z=1$;

b) $\iiint_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, gdzie V jest obszarem ograniczonym powierzchniami $x^2+y^2+z^2 \le 1,\ z>0$.

Rozwiązanie

a)



Rys. 2

Obszar Ω jest obszarem normalnym względem płaszczyzny OXY (rys. 2)

Ω: $\quad 0 \le x \le -1$

$\quad 0 \le y \le 1-x$

$\quad 0 \le z \le 1-x-y$

Zamieniamy całkę potrójną na całkę iterowaną:

$$\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3} = \int_0^1 [\int_0^{1-x} (\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3})dy]dx =$$

$$= \left| \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(x+y+z+1)^3} = -\frac{1}{2(x+y+z+1)^2}\Bigg|_0^{1-x-y} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2(x+y+1)^2} \right| = \int_0^1 [\int_0^{1-x} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2(x+y+1)}\right.$$

$$= \left| \int_0^{1-x} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2(x+y+1)^2} \right) dy = \left[-\frac{1}{8}y - \frac{1}{2(x+y+1)} \right]\Bigg|_0^{1-x} = -\frac{1}{8}(1-x) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2(x+1)} \right| =$$

$$= \int_0^1 \left(-\frac{3}{8} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{2(x+1)} \right) dx = \left(-\frac{3}{8}x + \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2}\ln|x+1| \right)\Bigg|_0^1 = -\frac{3}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\ln 2 = -\frac{5}{16} + \frac{1}{2}\ln 2.$$

b) Zmienne x, y, z zastępujemy zmiennymi r, φ, Θ, gdzie $x = r\cos\varphi\cos\Theta$,
$y = r\cos\varphi\sin\Theta$, $z = r\sin\varphi$, $0 \le r \le +\infty$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \Theta \le 2\pi$.

Współrzędne r, φ, Θ nazywamy współrzędnymi sferycznymi punktu o współrzędnych prostokątnych x, y, z. Jakobian przekształcenia

$$I(r, \Theta, \varphi) = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \Theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\Theta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\Theta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\Theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = r^2 \cos\varphi.$$

Obszar V (górna półkula) jest obrazem prostopadłościanu Ω.

$\Omega : 0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \Theta \le 2\pi$. Ponieważ $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, więc

$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz = \iiint_\Omega r^2 \cdot r^2 \cos\varphi \, drd\varphi d\Theta = \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} r^4 \cos\varphi d\Theta \right) d\varphi \right] dr =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4 \cos\varphi \cdot \Theta \Bigg|_0^{2\pi} d\varphi \right) dr = \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r^4 \cos\varphi d\varphi \right) dr = \int_0^R 2\pi r^4 \sin\varphi \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \int_0^1 2\pi r^4 dr =$$

$$= \frac{2\pi r^5}{5}\Bigg|_0^1 = \frac{2\pi}{5}.$$

Zadania

1. Obliczyć całkę podwójną funkcji f w obszarze D ograniczonym liniami:

a) $f(x,y)=x^2+y^2$, $D: y=x^2, y^2=x$; b) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $D: x^2+y^2-x=0$.

2. Obliczyć całki potrójne:

a) $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dxdydz$, $\quad \Omega: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2,\ 0\le z\le 3,$

b) $\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$, $\quad \Omega: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x,\ 0\le z\le \sqrt{1-x^2-y^2}.$

Odpowiedzi

1. a) $\dfrac{33}{140}$; b) $\pi-2$; 2. a) 18; b) $\dfrac{1}{24}$.

Literatura: **Z**. Roz. VII, § 1, 2.

CII 10	***CAŁKI KRZYWOLINIOWE***

1. Całka krzywoliniowa nieskierowana
2. Całka krzywoliniowa skierowana
3. Twierdzenie Greena.

1. **Całka krzywoliniowa nieskierowana**

1. Jeżeli funkcja $z = f(x, y)$ jest ciągła na krzywej regularnej

$$\Gamma\colon x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in \langle \alpha, \beta\rangle,\ \text{wówczas} \int\limits_{\Gamma} f(x, y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\left[\varphi(t), \psi(t)\right]\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\,dt$$

2. Jeżeli funkcja $z = f(x, y)$ jest ciągła na krzywej

$$\Gamma\colon y = g(x),\ g(x) \in C^1(\langle a, b\rangle),\ \text{wówczas} \int\limits_{\Gamma} f(x, y)ds = \int\limits_{a}^{b} f\left[x, g(x)\right]\cdot\sqrt{1+\left[g'(x)\right]^2}\,dx$$

Przykład

Obliczyć dane całki krzywoliniowe nieskierowane:

a) $\int\limits_{\Gamma}(x^2 + y^2)ds$, gdzie Γ jest okręgiem o równaniu $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$,

b) $\int\limits_{\Gamma} yds$, gdzie Γ jest łukiem paraboli $y = \sqrt{x}$, dla $0 \le x \le 1$.

Rozwiązanie

a) Korzystamy ze wzoru na zamianę całki krzywoliniowej na całkę oznaczoną.
$x(t) = 2\cos t$, $x'(t) = -2\sin t$, $y(t) = 2\sin t$, $y'(t) = 2\cos t$

$$\int\limits_{\Gamma}(x^2 + y^2)ds = \int\limits_{0}^{2\pi}(4\cos^2 t + 4\sin^2 t)\sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}\,dt =$$

$$\int\limits_{0}^{2\pi} 4(\cos^2 t + \sin^2 t)\sqrt{4(\sin^2 t + \cos^2 t)}\,dt = 8\int\limits_{0}^{2\pi} dt = 8t\Big|_{0}^{2\pi} = 16\pi.$$

b) Zamieniamy całkę krzywoliniową nieskierowaną na całkę oznaczoną.

$\Gamma: y=\sqrt{x}$, $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x\in\langle 0,1\rangle$.

$$\int_\Gamma y\,ds=\int_0^1\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{4x+1}dx=\left.\frac{(4x+1)^{\frac{3}{2}}}{12}\right|_0^1=\frac{5\sqrt{5}-1}{12}.$$

2. **Całka krzywoliniowa skierowana**

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\alpha^\beta\left\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\right\}dt$$

Przykład

Obliczyć dane całki krzywoliniowe skierowane:

a) $\int_\Gamma (x-y^2)dx+2xydy$, gdzie Γ jest odcinkiem łączącym punkty $A(1,1)$ i $B(2,2)$.

b) $\oint_L (2y+x\ln y)\,dx+\left(\dfrac{x^2}{2y}+6x\right)dy$, po okręgu $(x-2)^2+(y-2)^2=1$ skierowanym dodatnio.

c) $\oint_\Gamma (x-y)dx+(x+y)dy$, gdzie Γ jest elipsą o równaniach $x=a\cos t$, $y=b\sin t$,
$0\le t\le 2\pi$.

Rozwiązanie

a) Zamieniamy całkę krzywoliniową na całkę oznaczoną.

$\Gamma: x(t)=t,\ y(t)=t$, $1\le t\le 2$, $dx=dt$, $dy=dt$,

$$\int_\Gamma (x-y^2)dx+2xydy=\int_1^2(t-t^2)dt+2t^2dt=\int_1^2(t+t^2)dt=\left.\left(\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}\right)\right|_1^2=\frac{23}{6}.$$

b) $P(x,y)=2y+x\ln y$, $Q(x,y)=\dfrac{x^2}{2y}+6x$, $P_y'(x,y)=2+\dfrac{x}{y}$, $Q_x'(x,y)=\dfrac{x}{y}+6$.

Korzystamy ze wzoru Greena (p.2).

$$\oint_L(2y+x\ln y)dx+\left(\frac{x^2}{2y}+6x\right)dy=\iint_D\left(\frac{x}{y}+6-2-\frac{x}{y}\right)dxdy=\iint_D 4dxdy=4\iint_D dxdy=4|D|=4\pi,$$

gdyż D jest kołem $(x-2)^2+(y-2)^2\le 1$ o promieniu 1, więc $|D|=\pi$.

c) Korzystamy z twierdzenia Greena [WII11]

$$\oint_\Gamma P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

$P(x,y) = x - y,\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -1,\ Q(x,y) = x + y,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1,$

$\oint_\Gamma (x-y)dx + (x+y)dy = \iint_D 2dxdy = 2|D| = 2\pi ab,$ ponieważ pole elipsy $|D| = \pi ab.$

Zadania

1. Obliczyć dane całki krzywoliniowe nieskierowane:

a) $\int_\Gamma \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, gdzie Γ jest krzywą o równaniach parametrycznych: $x = \cos t + t\sin t$, $y = \sin t - t\cos t$, $0 \le t \le 2\pi$;

b) $\int_\Gamma (x^2+y^2)ds$, gdzie Γ jest okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 - x = 0$.

2. Obliczyć dane całki krzywoliniowe skierowane:

a) $\oint_\Gamma xydx + xdy$, gdzie Γ jest elipsą o równaniu $\dfrac{x^2}{g} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ skierowaną ujemnie względem swego wnętrza;

b) $\oint_\Gamma (2x^3 - 11y)dx + (4x - \cos y)dy$, gdzie Γ jest okręgiem o równaniu $x^2 + y^2 = 4$.

Odpowiedzi

1. a) $\dfrac{\sqrt{(1+4\pi^2)^3} - 1}{3}$; b) $\dfrac{\pi}{2}$. 2. a) -6π; b) 60π.

Literatura: **Z**. Roz. VII, § 3, 4.

CII 11	***ZASTOSOWANIA GEOMETRYCZNE CAŁEK WIELOKROTNYCH I KRZYWOLINIOWYCH***

1. Obliczanie pola obszaru płaskiego i objętości bryły za pomocą całki podwójnej.
2. Obliczanie objętości bryły za pomocą całki potrójnej.
3. Obliczanie pola obszaru płaskiego za pomocą całki krzywoliniowej.

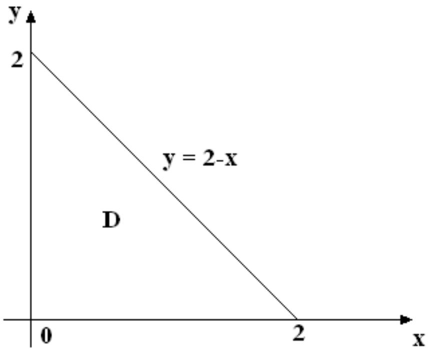
Całka podwójna

1. Objętość bryły ograniczonej wykresem nieujemnej i ciągłej funkcji f o podstawie $\overline{D}$ będącej obszarem regularnym.

Przykład 1

Obliczyć objętość $|V|$ bryły V ograniczonej paraboloidą obrotową $z = x^2 + y^2$, płaszczyznami układu współrzędnych i płaszczyzną $x + y - 2 = 0$.

Rozwiązanie



Rys. 1

$$D: \quad \begin{array}{l} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 2 - x \end{array}$$

$$|U| = \iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} (x^2 + y^2) dy \right) dx = \left| \int_0^{2-x} (x^2 + y^2) dy = \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \right|_0^{2-x} =$$

$$= x^2(2-x) + \frac{(2-x)^3}{3} = \frac{1}{3}(-4x^3 + 12x^2 - 12x + 8) \,| = \int_0^2 \frac{1}{3}(-4x^3 + 12x^2 - 12x + 8) dx =$$

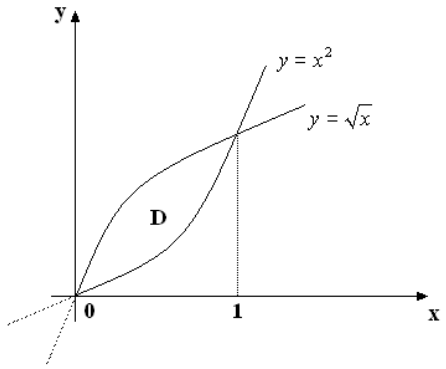
$$= \frac{1}{3}(-x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 8x) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}\left[j^3\right].$$

2. **Pole obszaru płaskiego**

Całka $\iint\limits_D 1\cdot dxdy = \iint\limits_D dxdy$ przedstawia z definicji pole obszaru $\overline{D}$.

Przykład 2

Obliczyć za pomocą całki podwójnej pole $|D|$ obszaru $\overline{D}$ ograniczonego krzywymi $y = x^2$ i $y^2 = x$ (parabole, rys. 2).



Rys. 2

$$D: \quad 0 \le x \le 1, \quad x^2 \le y \le \sqrt{x}.$$

$$|D| = \int\limits_D dxdy = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_x^{\sqrt{x}} dy \Big) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \Big(y \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \Big) dx = \int\limits_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx =$$

$$= \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} [j^3].$$

3. **Całka potrójna**

Jeżeli funkcja $f(x,y,z) \equiv 1$ w obszarze $\overline{\Omega}$ to całka $\iiint\limits_\Omega 1 dxdydz = \iiint\limits_\Omega dxdydz$ przedstawia z definicji objętość $|V|$ tego obszaru.

Przykład 3

Za pomocą całki potrójnej obliczyć $|V|$ bryły V z przykładu 1.

Rozwiązanie

$$V: \quad \begin{array}{l} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 - x \\ 0 \le z \le x^2 + y^2 \end{array}$$

$$|V| = \iiint\limits_V dxdydz = \int_0^2 [\int_0^{2-x} (\int_0^{x^2+y^2} dz)dy]dx = \int_0^2 [\int_0^{2-x} (z\Big|_0^{x^2+y^2})dy]dx =$$

$$= \int_0^2 [\int_0^{2-x} (x^2+y^2)dy]dx = \frac{8}{3}[j^3].$$

Całka krzywoliniowa skierowana

Jeżeli Γ jest brzegiem obszaru normalnego względem osi O_x, O_y $\overline{D}$, skierowanego dodatnio względem niego, to pole $|D|$ tego obszaru wyraża się wzorem

$$|D| = \frac{1}{2}\oint\limits_\Gamma -ydx + xdy. \qquad \text{(a)}$$

Przykład

Obliczyć pole elipsy o równaniach parametrycznych $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $a > 0, b > 0, 0 \le t \le 2\pi.$

Rozwiązanie

$x' = -a\sin t$, $y' = b\cos t$

Całkę krzywoliniową (a) zamieniamy na całkę oznaczoną i otrzymujemy pole elipsy:

$$|D| = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(-b\sin t)(-a\sin t) + a\cos t \cdot b\cos t]dt = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}(\sin^2 t + \cos^2 t)dt = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt =$$

$$= \frac{1}{2}abt\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}ab \cdot 2\pi = \pi ab \ [j^2].$$

Zadania

1. Za pomocą całki podwójnej obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami: $z = x + y + 4$, $y^2 = 4x$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y > 0$.

2. Za pomocą całki potrójnej obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami: $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $z = 0$, $x + z = 6$.

3. Za pomocą całki krzywoliniowej, skierowanej obliczyć pole kardioidy o równaniach $x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t,\ t \in \langle 0,\ 2\pi \rangle$.

Odpowiedzi

1. $84\frac{4}{15}$; 2. $\frac{48}{5}\sqrt{6}$; 3. 6π.

Literatura: **Z**. Roz. VII, § 1-4.

CII 12	*SZEREGI LICZBOWE*

1. Szeregi liczbowe o wyrazach nieujemnych

Zbieżność szeregów o wyrazach nieujemnych badamy na podstawie kryteriów zbieżności podanych w [WII 13]

Przykład

Zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{n^2}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+7}$; d) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

Rozwiązanie

a) Stosujemy kryterium d'Alemberta.

$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}3^n n!}{3^{n+1}(n+1)!n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n(n+1)3^n n!}{3^n\cdot 3\cdot n!(n+1)n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{3}<1$$

więc szereg jest zbieżny.

b) Stosujemy kryterium Cauchy'ego.

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n=0<1,$$ więc szereg jest zbieżny.

c) stosujemy kryterium porównawcze

$$\frac{1}{n^2+4n+7}=\frac{1}{(n^2+4n+4)+3}=\frac{1}{(n+2)^2+3}<\frac{1}{(n+2)^2}<\frac{1}{n^2}$$

Ponieważ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ jest zbieżny, więc rozpatrywany szereg jest zbieżny, czyli

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4n+7}<+\infty$$

d) Stosujemy kryterium całkowe.

Zbadamy zbieżność całki niewłaściwej.

$\int\limits_2^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \lim\limits_{A\to\infty}\int\limits_2^A \frac{1}{x\ln^2 x}dx$. Wyznaczamy całkę nieoznaczoną.

$$\int \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \left| \begin{matrix} \ln x = t \\ \frac{1}{x}dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{t} + C = \frac{-1}{\ln x} + C \text{, więc}$$

$$\int\limits_2^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \lim_{A\to\infty}\left(\frac{-1}{\ln x}\right)\Bigg|_2^A = \lim_{A\to\infty}\left(\frac{-1}{\ln A} + \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Całka niewłaściwa jest zbieżna, więc również dany szereg jest zbieżny.

2. Szeregi o wyrazach dowolnych

Przykład

Zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n(n+2)}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{2^n}$.

Rozwiązanie

a) Szereg jest szeregiem naprzemiennym, więc do badania jego zbieżności zastosujemy kryterium Leibniza [WII 13].

Ciąg $\left(\frac{n+1}{n(n+2)}\right)$ jest malejący oraz $\lim \frac{n+1}{n(n+2)} = 0$, więc szereg jest zbieżny. Szereg wartości bezwzględnych jest postaci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$. Ponieważ $\frac{n+1}{n(n+2)} > \frac{n}{n(n+2)} = \frac{1}{n+2}$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ jest rozbieżny, więc na podstawie kryterium porównawczego $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$ jest również rozbieżny.

Ostatecznie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n(n+2)}$ jest zbieżny warunkowo.

b) Jest to szereg liczbowy o wyrazach dowolnych. Zbadamy bezwzględną zbieżność tego szeregu.

Szereg wartości bezwzględnej jest postaci $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\cos n\alpha|}{2^n}$. Do badania zbieżności tego szeregu wygodnie jest zastosować kryterium porównawcze.

$$\frac{|\cos n\alpha|}{2^n} \le \frac{1}{2^n}, n \in N .$$

$\sum\frac{1}{2^n}$ jest szeregiem geometrycznym zbieżnym, więc szereg wartości bezwzględnych jest również zbieżny. Wynika stąd, że dany szereg jest bezwzględnie zbieżny.

Zadania

1. Zbadać zbieżność szeregów o wyrazach nieujemnych:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{2n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+1}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

2. Zbadać zbieżność szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{3^n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

Odpowiedzi

1. a) rozbieżny; b) zbieżny; c) zbieżny; d) zbieżny.
2. a) zbieżny warunkowo; b) zbieżny bezwzględnie; c) rozbieżny.

Literatura: **Z**. Roz. V, § 1, 2.

CII 13	*SZEREGI FUNKCYJNE*

1. Zbieżności jednostajne szeregu funkcyjnego.
2. Szeregi potęgowe. Promień zbieżności szeregu potęgowego.

Zbieżności jednostajne szeregu funkcyjnego

Zbieżność jednostajną szeregu funkcyjnego badamy w oparciu o kryterium Weierstraussa [WII 14].

Przykład

Zbadać jednostajną zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(x+n)}{n^3}$.

Rozwiązanie

Korzystamy z kryterium Weierstrassa.

Dla dowolnego $x \in R$ i dowolnego $n \in N$ zachodzi nierówność $\frac{|\cos(x+n)|}{n^3} \le \frac{1}{n^3}$.

Majoranta tego szeregu tj. szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ jest zbieżny, więc dany szereg funkcyjny jest zbieżny jednostajnie dla każdego $x \in R$. Ponieważ wyrazy tego szeregu są funkcjami ciągłymi, więc również jego suma jest funkcją ciągłą.

Szeregi potęgowe. Promień zbieżności szeregu potęgowego.

Promień zbieżności szeregu potęgowego wyznaczamy stosując wzory podane w [WII 14]

Przykłady

1. Obliczyć promień zbieżności szeregów potęgowych

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{3n} x^n$.

Rozwiązanie

a) $g = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3(n+1)} = \frac{1}{3}$, więc $r = \frac{1}{g} = 3$.

b) $g=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{3n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^3=\frac{1}{8}$, więc $r=\frac{1}{g}=8$.

2. Wyznaczyć przedziały zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\ln n}x^n$.

Rozwiązanie

Wyznaczamy promień zbieżności szeregu.

$$g=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\ln n}{\ln(n+1)2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{\ln(n+1)}=2\text{, ponieważ }\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}=1$$

gdyż $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln x}{\ln(x+1)}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{\underset{H}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$.

Promień zbieżności $r=\frac{1}{g}=\frac{1}{2}$, zatem szereg jest zbieżny w przedziale otwartym $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ oraz jest rozbieżny w zbiorze $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$. Zbadamy zbieżność szeregu dla $x=-\frac{1}{2}$ oraz $x=\frac{1}{2}$. Dla $x=-\frac{1}{2}$ otrzymujemy szereg liczbowy naprzemienny.

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\ln n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$. Ponieważ ciąg $\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ jest malejący oraz $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0$, więc na podstawie kryterium Leibniza otrzymany szereg naprzemienny jest zbieżny, stąd dany szereg jest zbieżny dla $x=-\frac{1}{2}$. Dla $x=\frac{1}{2}$ otrzymujemy szereg liczbowy o wyrazach dodatnich.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\ln 2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}.$$

Ponieważ $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n}$ dla $n\geq 2$ oraz $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ jest rozbieżny, więc na podstawie kryterium porównawczego wnioskujemy, że $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ jest rozbieżny. Ostatecznie dany szereg potęgowy jest zbieżny w przedziale $\left\langle -\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Zadania

1. Obliczyć promień zbieżności szeregu:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+3}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n}{n^n}x^n$; c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n+1)^n}x^n$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{\sqrt{n}}x^n$.

2. Wyznaczyć przedziały zbieżności szeregów potęgowych:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n}x^n$.

Odpowiedzi

1. a) 1; b) $+\infty$; c) $\frac{1}{e}$; d) $\frac{1}{10}$; 2. a) $(-1,1>$; b) $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right\rangle$.

Literatura: Z. Roz. V, § 3, 4.

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

CII 14	***SZEREG TAYLORA***

1. Szereg Taylora
2. Szereg Maclaurina

1. Rozwinięcie funkcji w szereg Taylora

W [WII 15] podano twierdzenie Taylora oraz rozwinięcie w szereg Maclaurina wybranych funkcji. Ponadto podano zastosowanie szeregu Taylora do całkowania funkcji.

Przykład

Korzystamy z rozwinięcia w szereg Maclaurina funkcji $(1+x)^{\alpha}$ podanego w [WII 15]:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots \quad \text{dla } -1<x<1.$$

Ponieważ $\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}$, więc mamy

$$f(x)=\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}\frac{x}{1!}-\frac{2}{3^2}\cdot\frac{x^2}{2!}+\frac{2\cdot 5}{3^3}\cdot\frac{x^3}{3!}-\frac{2\cdot 5\cdot 8}{3^4}\cdot\frac{x^4}{4!}+\ldots$$

szereg jest zbieżny dla $-1<x<1$.

2. Zastosowanie szeregu Taylora

Przykłady

1. Obliczyć całkę $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ z dokładnością do $0{,}001$.

Rozwiązanie

Całka nieoznaczona $\int \frac{\sin x}{x}dx$ jest całką nieelementarną, więc najpierw rozwiniemy funkcję podcałkową $\frac{\sin x}{x}$ w szereg Maclaurina, a następnie otrzymany szereg będziemy całkowali „wyraz po wyrazie".

Korzystamy z rozwinięcia w szereg Maclaurina funkcji $\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots,\ x\in R.$

Stąd $\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{x}\left(x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\ldots\right)=1-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^4}{5!}-\dfrac{x^6}{7!}+\ldots$.

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots\right)dx=\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\frac{x^7}{7\cdot 7!}+\ldots\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}+\ldots=1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600}-\frac{1}{35280}+\ldots$$

Biorąc sumę trzech pierwszych składników popełniamy błąd bezwzględny Δ spełniający nierówność

$$|\Delta|<\frac{1}{35280}<0{,}0005\text{, stąd }\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx\approx 0{,}946.$$

2. Obliczyć wartość przybliżoną całki

$\int_0^1\cos x^2dx$ biorąc 2 wyrazy rozwinięcia funkcji podcałkowej w szereg i podać dokładność przybliżenia.

Rozwiązanie

Korzystamy z podanego rozwinięcia funkcji $\cos x$ w szereg Maclaurina a następnie podstawiamy x^2 za x.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\text{, stąd }\cos x^2=1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{12}}{6!}+\ldots.$$

$$\int_0^1\cos x^2dx=\int_0^1\left(1-\frac{x^4}{2!}+\frac{x^8}{4!}-\frac{x^{12}}{6!}+\ldots\right)dx=\left(x-\frac{x^5}{5\cdot 2!}+\frac{x^9}{9\cdot 4!}-\ldots\right)\Bigg|_0^1=1-\frac{1}{5\cdot 2!}+\frac{1}{9\cdot 4!}-\ldots$$

$$\int_0^1\cos x^2dx\approx 1-\frac{1}{5\cdot 2!}=0{,}9.$$

Błąd bezwzględny Δ spełnia nierówność $|\Delta|=\dfrac{1}{9\cdot 4!}=\dfrac{1}{216}<0{,}01$.

Zadania

1. Rozwinąć w szereg Maclaurina funkcje:
a) $f(x)=2^x$; b) $f(x)=\sqrt{1+x}$

2. Obliczyć całkę $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ z dokładnością do 0,001.

Odpowiedzi

1. a) $2^x = 1 + \frac{\ln 2}{1!}\cdot x + \frac{\ln^2 2}{2!}\cdot x^2 + \ldots + \frac{\ln^{n-1} 2}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots,\qquad x \in R.$

b) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1!} - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{x^2}{2!} + \frac{1\cdot 3}{2^3}\cdot\frac{x^3}{3!} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4}\cdot\frac{x^4}{4!} + \ldots$

Szereg zbieżny dla $-1 < x < 1$. 2. $0{,}747$.

Literatura: Z. Roz V, § 6, 7.