Materiały dydaktyczne

Matematyka

I Semestr

Ćwiczenia

	Przedmiot:	**MATEMATYKA**									
Kierunek: Mechatronika **Rozkład zajęć w czasie studiów – Studia pierwszego stopnia**											
Semestr	Liczba tygodni w semestrze	Liczba godzin w tygodniu				Liczba godzin w semestrze					Punkty kredytowe
		W	Ć	L	S	Σ	W	Ć	L	S	
I	15	2E	3	–	–	75	30	45	–	–	6
II	15	1	2	–	–	45	15	30	–	–	4
III	15	1E	2	–	–	45	15	30	–	–	5
Razem w czasie studiów						**165**	**60**	**105**	**–**	**–**	**15**

Związki z innymi przedmiotami:

– fizyka,
– mechanika techniczna,
– wytrzymałość materiałów,
– podstawy konstrukcji maszyn,
– elektrotechnika i elektronika,
– automatyka i robotyka,
– metrologia i systemy pomiarowe.

Zakres wiedzy do opanowania

Po wysłuchaniu wykładów przewidywanych programem oraz wykonaniu ćwiczeń student powinien:

Znać →

1) Definicje i podstawowe twierdzenia dotyczące zbioru liczb zespolonych, macierzy, wyznaczników i układów równań liniowych.
2) Rachunek wektorowy, równania płaszczyzny i prostej w przestrzeni R^3.
3) Definicje i podstawowe twierdzenia dotyczące wszechstronnego badania przebiegu zmienności funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.
4) Podstawowe zagadnienia dotyczące rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych.
5) Podstawy rachunku całkowego (całka nieoznaczona, całka oznaczona, całki niewłaściwe, całki wielokrotne i krzywoliniowe).
6) Kryteria zbieżności szeregów liczbowych, podstawowe twierdzenia dotyczące szeregów funkcyjnych.
7) Sposoby rozwiązywania wybranych typów równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego i drugiego rzędu.
8) Elementy rachunku prawdopodobieństwa, podstawy statystyki matematycznej.

Umieć →

1) Wykonywać działania na liczbach zespolonych i macierzach, obliczać wyznaczniki oraz rozwiązywać układy równań liniowych metodą macierzową, za pomocą wzorów Cramera oraz w oparciu o twierdzenie Kroneckera-Capellego.
2) Przeprowadzać wszechstronne badanie funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.
3) Wyznaczać całki nieoznaczone, obliczać całki oznaczone, podwójne, potrójne i krzywoliniowe, stosować rachunek całkowy w geometrii i przedmiotach technicznych.
4) Wyznaczać ekstrema lokalne i warunkowe funkcji wielu zmiennych, badać zbieżność szeregów liczbowych i funkcyjnych, rozwijać funkcje w szereg Taylora.
5) Rozwiązywać wybrane typy równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych pierwszego i drugiego rzędu.
6) Obliczać prawdopodobieństwo zdarzeń losowych, wyznaczać estymatory i przedziały ufności, stosować testy statystyczne do weryfikacji hipotez statystycznych.

Treść zajęć dydaktycznych

Nr tematu	Tematy i ich rozwinięcie	Liczba godzin				
		Razem	W	Ć	L	S
	Semestr I					
1.	**Elementy logiki matematycznej**: wyznaczanie wartości logicznych zdań złożonych, sprawdzanie formuł rachunku zdań metodą zerojedynkową, dowodzenie twierdzeń klasycznego rachunku kwantyfikatorów. **Elementy teorii zbiorów**: wykonywanie działań na zbiorach, dowodzenie wybranych praw algebry zbiorów. **Algebra Boole’a**: dowodzenie twierdzeń algebry Boole’a na podstawie aksjomatów, przykłady realizacji algebry Boole’a (algebra zdań, algebra zbiorów).	10	–	10	–	–
2.	**Algebra wyższa**: potęgowanie i pierwiastkowanie liczb zespolonych, rozwiązywanie równań algebraicznych w zbiorze liczb zespolonych. **Macierze, wyznaczniki, układy równań liniowych**: wykonywanie działań na macierzach, obliczanie wyznaczników, wyznaczanie macierzy odwrotnej, rozwiązywanie układów równań liniowych metodą macierzową i za pomocą wzorów Cramera.	10	–	10	–	–
3.	**Geometria analityczna w przestrzeni $\mathbf{R}^3$**: obliczanie iloczynu skalarnego i mieszanego, wyznaczanie współrzędnych iloczynu wektorowego, wyznaczanie równań płaszczyzny i prostej, obliczanie odległości punktu od płaszczyzny, punktu od prostej i prostej od prostej.	5	–	5	–	–
4.	**Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej rzeczywistej**: obliczanie granic ciągów i granic funkcji, badanie ciągłości funkcji, wyznaczanie pochodnych na podstawie definicji i za pomocą reguł różniczkowania; wyznaczanie ekstremów, przedziałów monotoniczności, punktów przegięcia i przedziałów wypukłości i wklęsłości funkcji; wyznaczanie asymptot, rozwijanie funkcji według wzoru Taylora.	20	–	20	–	–
	Razem	45		45	–	–

I. Metody dydaktyczne

Przedmiot jest realizowany w formie wykładów i ćwiczeń rachunkowych na I i II roku studiów. Pomoce dydaktyczne stanowią:

- literatura podstawowa i uzupełniająca do wykładów i ćwiczeń rachunkowych,
- dzienniczki studentów.

II. Forma i warunki zaliczenia przedmiotu

II-1. Forma i warunki zaliczenia ćwiczeń rachunkowych

- obecność studenta na ćwiczeniach,
- uzyskanie pozytywnych ocen z 2 sprawdzianów pisemnych w ciągu semestru przeprowadzonych w terminach uzgodnionych ze studentami,
- zaliczenie z oceną.

CI 1	***ELEMENTY LOGIKI. ALGEBRA ZBIORÓW. ALGEBRA BOOLE'A.***

1. Elementy logiki matematycznej
2. Algebra zbiorów
3. Algebra Boole'a

Elementy logiki matematycznej

Rachunek zdań

Przykład

Sprawdzić metodą zero-jedynkową, że wyrażenie
$[p \wedge (q \vee r)]$ □ $[(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ (prawo rozdzielności koniunkcji względem alternatywy) jest tautologią rachunku zdań.

Rozwiązanie

Dowód przedstawiono w postaci tabelarycznej

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Ponieważ wartości logiczne zdań podanych w dwóch ostatnich kolumnach są równe, więc zdanie jest twierdzeniem rachunku zdań.

Algebra zbiorów

Przykład

W oparciu o prawa rachunku zdań udowodnić prawo de Morgana $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Rozwiązanie

Niech U oznacza zbiór, którego podzbiorami są rozpatrywane zbiory.

$a \in (A \cup B)' \Leftrightarrow a \in (U - (A \cup B)) \Leftrightarrow a \in U \wedge a \notin A \cup B \Leftrightarrow a \in U \wedge (a \notin A \wedge \wedge\, a \notin B) \Leftrightarrow$
$(a \in U \wedge a \notin A) \wedge (a \in U \wedge a \notin B) \Leftrightarrow (a \notin A') \wedge (a \notin B') \Leftrightarrow a \in A' \cap B'$.
$a \notin (A \cup B) \Leftrightarrow a \notin A \wedge a \notin B$ otrzymaliśmy z prawa de Morgana $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$,

ponadto $a \in U \wedge (a \notin A \wedge a \notin B) \Leftrightarrow (a \in U \wedge a \notin A) \wedge (a \in U \wedge a \notin B)$ otrzymaliśmy z następującego prawa rachunku zdań $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$.

Algebra Boole'a

Przykład

W oparciu o aksjomaty algebry Boole'a [WI 2] wykazać, że: $x \oplus 1 = 1$.

Rozwiązanie

$$1 \overset{B2}{=} x \oplus x' \overset{B5}{=} x \oplus (x' \odot 1) \overset{B4}{=} (x \oplus x') \odot (x \oplus 1) \overset{B2}{=} 1 \odot (x \oplus 1) \overset{B7}{=} (x \oplus 1) \odot 1 \overset{B5}{=} x \oplus 1.$$

Symbol B_k nad znakiem równości oznacza numer odpowiedniego aksjomatu.

Zadania

1. Udowodnić następujące prawa rachunku zdań:

a) $[(\square p \ \square\ q)\square(\square\square q)]\ \square\square p$.

b) Sprawdzić czy następujące zdania są twierdzeniami rachunku zdań:
$[(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (q \Rightarrow p)$, $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \wedge q) \Leftrightarrow p]$.

2. Za pomocą kwantyfikatorów i funktorów zdaniotwórczych zapisać wyrażenia:

a) Funkcja f ma dokładnie jedno miejsce zerowe,

b) Funkcja f jest funkcją malejącą.

3. Udowodnić prawa algebry zbiorów:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

4. Na podstawie aksjomatów algebry Boole'a wykazać, że: $x \odot x = x$.

Literatura: **R**. Roz. I, § 1,2.

CI 2	*ZBIÓR LICZB ZESPOLONYCH*

1. Działania na liczbach zespolonych
2. Wzór de Moivre'a
3. Pierwiastkowanie liczb zespolonych
4. Równania

Przykłady

1. Działania na liczbach zespolonych

Obliczyć: $z_1 \pm z_2,\quad z_1 \cdot z_2,\quad \frac{z_1}{z_2}(z_2 \neq 0)$, gdzie $z_1 = 2+3i,\quad z_2 5-4i.$

Rozwiązanie

$$z_1 + z_2 = (2+3i)+(5-4i)=(2+5)+(3-4)i = 7-i$$
$$z_1 - z_2 = (2+3i)-(5-4i)=(2-5)+[3-(-4)]i = -3+7i$$
$$z_1 \cdot z_2 = (2+3i)\cdot(5-4i)=10-8i+15i-12i^2 =$$
$$=10+7i-12\cdot(-1)=22+7i$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\cdot\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{2+3i}{5-4i}\cdot\frac{5+4i}{5+4i} = \frac{10+8i+15i+12i^2}{5^2-(4i)^2} =$$
$$=\frac{10+23i+12\cdot(-1)}{5^2+4^2} = \frac{-2+23i}{41} = -\frac{2}{41}+\frac{23}{41}i$$

2. Liczbę $z = 1-\sqrt{3}$ przedstawić w postaci trygonometrycznej.

Rozwiązanie

Postać trygonometryczna liczby $z = a+bi\ (z \neq 0)$:

$$z = a+bi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),\quad |z| = \sqrt{a^2+b^2}\ ;\quad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{|z|}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{|z|}. \end{cases}$$

$$a = 1,\quad b = -\sqrt{3},\quad |z| = \sqrt{1+\left(i\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\cos\varphi = \cos(2\pi-\alpha) = \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3},\quad \varphi = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi,$$
$$z = 1-i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right).$$

3. Obliczyć $\left(1-i\sqrt{3}\right)^{50}$

Rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru de Moivre'a

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin\varphi$

$$\left(1-i\sqrt{3}\right)^{60} = \left[2\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi\right)\right]^{60} = 2^{60}\left(\cos 60\cdot\frac{5}{3}\pi + i\sin 60\cdot\frac{5}{3}\pi\right) =$$

$$2^{60}(\cos 100\pi + i\sin 100\pi) = 2^{60}(\cos 50\cdot 2\pi + i\sin 50\cdot 2\pi) = 2^{60}(1+0\cdot i) = 2^{60}.$$

4. Obliczyć $\sqrt[3]{-i}$.

Rozwiązanie

Korzystamy ze wzoru $w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$ $k = 0, 1, ..., n-1$.

Liczbę $z = -i$ przedstawiamy w postaci trygonometrycznej: $-i = \cos\frac{3}{2}\pi + i\sin\frac{3}{2}\pi$.

$$w_k = \cos\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{3},\ k = 0,1,2.$$

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,\quad w_1 = \cos\frac{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$w_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i .$$

5. Rozwiązać w zbiorze liczb zespolonych równania:

a) $z^2 - 2z + 2 = 0$; b) $z^2 - 3z + 3 + i = 0$.

Rozwiązanie

a) Wyróżnik $\Delta = 4 - 8 = -4$, $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-4} = \sqrt{i^2 4} = \begin{cases} -2i, \\ 2i. \end{cases}$

Ze wzorów na pierwiastki równania kwadratowego mamy:

$$z_1 = \frac{2-2i}{2} = 1 - i,\ z_2 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i .$$

b) Wyróżnik $\Delta = (-3)^2 - 4(3+i) = -3 - 4i$.

$\sqrt{\Delta}$ wyznaczamy korzystając z definicji pierwiastka stopnia drugiego $(\sqrt{\Delta} = \omega \Leftrightarrow \Delta = \omega^2)$

Niech $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-3-4i} = x + yi$ $(x, y \in R)$. Wówczas $-3 - 4i = (x + yi)^2$,

$-3 - 4i = x^2 - y^2 + 2xyi$,

stąd otrzymuję układ równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4. \end{cases}$$

Wyznaczamy $y = -\dfrac{2}{x}$ z drugiego równania $(x \neq 0)$ i podstawiamy do pierwszego równania, otrzymujemy równanie dwukwadratowe $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$.
Podstawiamy $x^2 = t$ i mamy równanie $t^2 + 3t - 4 = 0$, którego rozwiązania pierwiastkami są $t_1 = -4$ oraz $t_2 = 1$.

Stąd mamy $x^2 = -1$ (równanie sprzeczne w zbiorze R) oraz $x^2 = 1$, więc $x_1 = 1$ lub $x_2 = -1$, $y_1 = -2$, $y_2 = 2$.

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-3-4i} = \begin{cases} 1-2i, \\ -1+2i. \end{cases}$ Ostatecznie $z_1 = \dfrac{3+1-2i}{2} = \dfrac{4-2i}{2} = 2-i$,
$z_2 = \dfrac{3-1+2i}{2} = \dfrac{2+2i}{2} = 1+i$.

Zadania

1. Przedstawić w postaci trygonometrycznej (bez pomocy tablic) następujące liczby zespolone:
a) -1; b) $-i$; c) $-1-1$; d) $-1-i\sqrt{3}$.

2. Obliczyć pierwiastki trzeciego stopnia z następujących liczb zespolonych:
a) $-i$; b) -1; c) $1+i\sqrt{3}$.

3. Rozwiązać równania kwadratowe:
a) $z^2 + (2+2i)z + 3 - 2i = 0$; b) $z^2 + (1+4i)z - 5 - i = 0$; c) $z^2 + 2iz + i - 1 = 0$.

4. Rozwiązać równania dwukwadratowe:
a) $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$; b) $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$.

Odpowiedzi

1. a) $\cos\pi + i\sin\pi$; b) $\cos\dfrac{3}{2}\pi + i\sin\dfrac{3}{2}\pi$; c) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{4}\pi + i\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)$; d) $2\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$.

2. a) $\dfrac{1}{2}i, \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i, -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$; b) $-1, \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i, \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$;
c) $\sqrt[3]{2}\left[\cos\dfrac{6k+1}{9}\pi + i\sin\dfrac{6k+1}{9}\pi\right], k = 0,1,2.$

3. a) $i, -2-3i$; b) $1-i, -2-3i$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}-2}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}+2}{2}i$. 4. a) $\pm\frac{\sqrt{3}\pm i}{\sqrt{2}}$; b) $\pm 4, \pm i$.
Literatura: Z**. Roz. I, § 1.**

CI 3	*MACIERZE. DZIAŁANIA NA MACIERZACH*

1. Działania na macierzach
2. Wyznaczanie macierzy odwrotnej z definicji

Przykłady

1. Dane są macierze $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 5 & 0 & -2\\ 6 & -1 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -5 & 4\\ 2 & 0 & -6\end{bmatrix}$..

Wyznaczyć**:** a) A^T; b) $5A$; c) $A+B$; d) $A-B$; e) $A\cdot B$; f) $B\cdot A$; g) $(AB)^T$; h) $B^T A^T$.

Rozwiązanie

Korzystamy z definicji działań na macierzach podanych w [WI 4]:

a) $A^T=\begin{bmatrix}2 & 5 & 6\\ 3 & 0 & -1\\ 1 & -2 & 4\end{bmatrix}$; b) $5A=5\cdot\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 5 & 0 & -2\\ 6 & -1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\cdot 2 & 5\cdot 3 & 5\cdot 1\\ 5\cdot 5 & 5\cdot 0 & 5\cdot(-2)\\ 5\cdot 6 & 5\cdot(-1) & 5\cdot 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 15 & 5\\ 25 & 0 & -10\\ 30 & -5 & 20\end{bmatrix}$;

c) $A+B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 5 & 0 & -2\\ 6 & -1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -5 & 4\\ 2 & 0 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+1 & 3+(-2) & 1+0\\ 5+3 & 0+(-5) & -2+4\\ 6+2 & -1+0 & 4+(-6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 8 & -5 & 2\\ 8 & -1 & -2\end{bmatrix}$;

d) $A-B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 5 & 0 & -2\\ 6 & -1 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -5 & 4\\ 2 & 0 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-1 & 3-(-2) & 1-0\\ 5-3 & 0-(-5) & -2-4\\ 6-2 & -1-0 & 4-(-6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5 & 1\\ 2 & 5 & -6\\ 4 & -1 & 10\end{bmatrix}$;

e)

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 5 & 0 & -2\\ 6 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -5 & 4\\ 2 & 0 & -6\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}2\cdot 1+3\cdot 3+1\cdot 2 & 2\cdot(-2)+3\cdot(-5) & 2\cdot 0+3\cdot 4+1\cdot(-6)\\ 5\cdot 1+0\cdot 3+(-2)\cdot 2 & 5\cdot(-2)+0\cdot(-5)+(-2)\cdot 0 & 5\cdot 0+0\cdot 4+(-2)(-6)\\ 6\cdot 1+(-1)\cdot 3+4\cdot 2 & 6\cdot(-2)+(-1)\cdot(-5)+4\cdot 0 & 6\cdot 0+(-1)\cdot 4+4\cdot(-6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & -19 & 6\\ 1 & -10 & 12\\ 11 & -7 & -28\end{bmatrix}.$$

Analogicznie wyznaczamy

f) $B\cdot A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -5 & 4\\ 2 & 0 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 5 & 0 & -2\\ 6 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-8 & 3 & 5\\ 5 & 5 & 29\\ -32 & 12 & -20\end{bmatrix}$.

Przykład jest ilustracją tezy: mnożenie macierzy (na ogół) nie jest przemienne tzn. $AB \neq BA$.

g) $(AB)^T = \begin{bmatrix} 13 & 1 & 11 \\ -19 & -10 & -7 \\ 6 & 12 & -28 \end{bmatrix}$,

h) $B^T \cdot A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+9+2 & 5-4 & 6-3+8 \\ -4-15 & -10 & -12+5 \\ 12-6 & 12 & -4-24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 1 & 11 \\ -19 & -10 & -7 \\ 6 & 12 & -28 \end{bmatrix}$

Przykłady g) i h) są więc ilustracją twierdzenia $(AB)^T = B^T A^T$.

2. Korzystając z definicji macierzy odwrotnej [WI 4] wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy
$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie

Szukamy macierzy $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ t & u \end{bmatrix}$ takiej, że $A \cdot A^{-1} = J$, czyli $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ t & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

Stąd $\begin{bmatrix} 2x-t & 2y-u \\ 3x+5t & 3y+5u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-t=1 \\ 3x+5t=0 \\ 2y-u=0 \\ 3y+5u=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x=\frac{5}{13} \\ y=\frac{1}{13} \\ t=-\frac{3}{13} \\ u=\frac{2}{13} \end{array}$, stąd $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{1}{13} \\ -\frac{3}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix}$.

Zadania

1. Dane są macierze: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 7 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Wykazać, że:

a) $(A+B)+C = A+(B+C)$; b) $A(BC) = (AB)C$; c) $(A+B)^T = A^T + B^T$;
d) $(A+B)C = AB+BC$; e) $A(B+C) = AB+AC$; f) $(AB)^T = B^T A^T$.

2. Wyznaczyć macierz X z równania:
a) $X\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$;

d) $X\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 5 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = [11-15]$

Odpowiedzi:

2. a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{bmatrix}$; d) $[1 \quad -1 \quad 2 \quad 3]$.

Literatura: **P1**. Roz. I, § 1.1., 1.3.; **P2**. Roz. I.

CI 4	*WYZNACZNIKI, MACIERZE CD.*

1. Wyznaczniki
2. Macierz odwrotna
3. Rząd macierzy

Przykłady

1. Wyznaczniki

1. Na podstawie definicji [WI 5] obliczyć wyznacznik *detA*= $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 11 \\ 2 & -9 & 5 \\ 1 & -4 & -12 \end{vmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 11 \\ 2 & -9 & 5 \\ 1 & -14 & -12 \end{vmatrix} = 5\cdot(-1)^2 \begin{vmatrix} -9 & 5 \\ -4 & -12 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -12 \end{vmatrix} + 11\cdot(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -9 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\cdot 128 + 3\cdot(-29) + 11\cdot 1 = 564.$$

2. Obliczyć wyznacznik $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$.

Rozwiązanie

Z podanych w [WI 5] własności wyznacznika wynika, że wartość wyznacznika nie zmieni się, gdy do dowolnego wiersza (kolumny) dodamy inny wiersz (kolumnę) pomnożony przez liczbę.

Możemy np. uzyskać trzy zera w pierwszym wierszu mnożąc odpowiednio kolumny pierwszej przez 2, -3, -4 i dodając do kolumn drugiej, trzeciej i czwartej.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & -3 & -5 \\ 5 & 9 & -13 & -16 \\ 8 & 23 & -23 & -27 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{11}^* = 1\cdot(-1)^2\cdot A_{11} = A_{11} = \begin{vmatrix} 10 & -3 & -5 \\ 9 & -13 & -16 \\ 23 & -23 & -27 \end{vmatrix} = -255$$

(Metoda Sarrusa)

3. Dane są macierze: $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

Sprawdzić, że $\det(A\cdot B)=\det A\cdot\det B$ (twierdzenie Cauchy'ego).

Rozwiązanie

$$A\cdot B=\begin{bmatrix}0&3&-1\\1&-2&1\\-1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&-1\\-1&3&1\\1&-3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&12&-1\\5&-9&1\\-1&-3&15\end{bmatrix},\quad \det(A\cdot B)=\begin{vmatrix}-4&12&-1\\5&-9&1\\-1&-3&15\end{vmatrix}=-360$$

$$\det A=\begin{vmatrix}0&3&-1\\1&-2&1\\-1&2&3\end{vmatrix}=-12, \det B=\begin{vmatrix}2&0&-1\\-1&3&1\\1&-3&4\end{vmatrix}=30$$

więc $\det(A\cdot B)=-360=-12\cdot 30=\det A\cdot\det B$.

Macierz odwrotna

Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy $A=\begin{bmatrix}-8&29&-11\\-5&18&-7\\1&-3&1\end{bmatrix}$.

Rozwiązanie

Macierz odwrotną możemy wyznaczyć korzystając ze wzoru [WI 5]:

$$A^{-1}=\frac{\left(A^D\right)^T}{\det A},\qquad \det A\neq 0.$$

1. $\det A=\begin{vmatrix}-8&29&-11\\-5&18&-7\\1&-3&1\end{vmatrix}=-1\neq 0$, macierz A jest macierzą nieosobliwą, więc A^{-1} istnieje.

2. Wyznaczamy macierz dopełnień algebraicznych macierzy A, tzn.
macierz $A^D=\left[A_{ij}^*\right]=\left[(-1)^{i+j}A_{ij}\right]\qquad 1\leq i\leq 3, 1\leq j\leq 3$.

$$A_{11}^*=A_{11}=\begin{vmatrix}18&-7\\-3&1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{12}^*=-A_{12}=-\begin{vmatrix}-5&-7\\1&1\end{vmatrix}=-2,\ A_{13}^*=A_{13}=\begin{vmatrix}-5&18\\1&-3\end{vmatrix}=-3,$$

$$A_{21}^*=-A_{21}=-\begin{vmatrix}29&-11\\-3&1\end{vmatrix}=4,\quad A_{22}^*=A_{22}=\begin{vmatrix}-8&-11\\1&1\end{vmatrix}=3,\quad A_{23}^*=-A_{23}=-\begin{vmatrix}-8&29\\1&-3\end{vmatrix}=5,$$

$$A_{31}^*=A_{31}=\begin{vmatrix}29&-11\\18&-7\end{vmatrix}=-5,\quad A_{32}^*=-A_{32}=-\begin{vmatrix}-8&-11\\-5&-7\end{vmatrix}=-1,\quad A_{33}^*=A_{33}=\begin{vmatrix}-8&29\\-5&18\end{vmatrix}=1.$$

$$A^{-1}=\frac{\left(A^D\right)^T}{\det A}=\frac{1}{-1}\cdot\begin{bmatrix}-3 & -2 & -3\\ 4 & 3 & 5\\ -5 & -1 & 1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{bmatrix}.$$

Oczywiście można sprawdzić, że $A\cdot A^{-1}=J=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Rząd macierzy

Określenie rzędu macierzy na podstawie podanej definicji może okazać się kłopotliwe. Znalezienie największego stopnia podwyznacznika różnego od zera bywa niekiedy żmudne. Można wykazać, że rząd macierzy równy jest rzędowi macierzy powstałej przez dodawanie do dowolnego wiersza (kolumny) macierzy innego wiersza (kolumny) pomnożonego przez liczbę. W wyniku stosowania wielokrotnego tych operacji elementarnych na wierszach (kolumnach) otrzymamy macierz o maksymalnej liczbie zer. Wówczas rząd tej macierzy (również rząd danej macierzy) równa się ilości wierszy (kolumn), w których są elementy różne od zera.

Obliczyć rząd macierzy $A=\begin{bmatrix}4 & 3 & -8 & 2 & 7\\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2\\ 4 & 3 & -5 & 2 & 3\\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6\\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5\end{bmatrix}$.

Rozwiązanie

Stosujemy np. następujące operacje elementarne na wierszach macierzy A: od wiersza drugiego i czwartego odejmujemy wiersz pierwszy pomnożony przez 2 oraz odejmujemy wiersz pierwszy od wiersza trzeciego i piątego i otrzymujemy macierz B ($R(A)=R(B)$):

$$B=\begin{bmatrix}4 & 3 & -8 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 9 & 0 & -12\\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4\\ 0 & 0 & 15 & 0 & -20\\ 0 & 0 & 9 & 0 & -12\end{bmatrix}.$$

Następnie od trzeciego wiersza macierzy B odejmujemy wiersz drugi pomnożony przez $\frac{1}{3}$, od czwartego drugi pomnożony przez $\frac{5}{3}$ oraz od piątego drugi.

Otrzymujemy macierz $C=\begin{bmatrix}4 & 3 & -8 & 2 & 7\\ 0 & 0 & 9 & 0 & -12\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

Ponieważ wiersz pierwszy i drugi macierzy nie zawierają odpowiednich elementów proporcjonalnych nie otrzymamy kolejnego (pierwszego lub drugiego) wiersza zawierającego wyłącznie zera. Stąd $R(C)=R(B)=R(A)=2$

Zadania

1. Obliczyć wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix}1 & 3 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6\end{vmatrix}$.

2. Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy:

a) $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -38 & 41 & -34\\ 27 & -29 & 24\end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix}0 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

3. Określić rząd macierzy:

a) $\begin{bmatrix}2 & 5 & 8 & 7 & 13\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3\\ 1 & 3 & 5 & 3 & 8\end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix}2 & 5 & -1 & 4 & 3\\ 4 & 1 & 6 & -1 & -1\\ -3 & 1 & 2 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 0 & 4 & -9\\ 6 & 6 & 5 & 3 & 2\end{bmatrix}$

Odpowiedzi

1. a) -48; b) 394. 2. a) $\begin{bmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 0 & 1\\ -1 & -1 & -1 & 0\end{bmatrix}$. 3. a) 2; b) 4.

Literatura: Z. **Roz. I, § 2, 3.**

CI 5	***UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH***

1. Układ równań Cramera
2. Metoda macierzowa
3. Układ *m* równań o *n* niewiadomych (przypadek ogólny)

Przykłady

1. Rozwiązać układ równań stosując wzory Cramera [WI 6]:

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ 2x-y-z=0 \\ x+3y+z=5 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Obliczamy wyznacznik macierzy głównej A oraz wyznaczniki macierzy $A_K\,(k=1,2,3,)$ powstałych z macierzy A przez zastąpienie *k*-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6,$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6,\ \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 6,\ \det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 6.$$

Następnie korzystamy ze wzorów Cramera:

$$x = \frac{\det A_1}{\det A} = 1,\ y = \frac{\det A_2}{\det A} = 1,\ z = \frac{\det A_3}{\det A} = 1.$$

2. Rozwiązać układ równań z przykładu 1 metodą macierzową [WI 6].

Rozwiązanie

Zapis macierzowy układu równań: $AX = B$, stąd $X = A^{-1} \cdot B$,

$$\text{Gdzie } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix},\ \det A = 6.$$

Następnie wyznaczamy macierz odwrotną A^{-1} do macierzy A [WI 6].

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \left(A^D\right)^T = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}^T = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&2&0\\-3&0&3\\7&-2&-3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3\\0\\5\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6\\6\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\text{ zatem } x=y=z=1.$$

3. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases}2x+3y+z=1\\3x+2y+z=5\\2x+y+3z=11\\8x+5y+5z=21.\end{cases}$$

Rozwiązanie:

Ponieważ liczba niewiadomych nie równa się ilości równań, układ równań nie jest układem Cramera. Na podstawie twierdzenia Kroneckera-Capellego [WI 6] rozstrzygamy czy układ ma rozwiązanie.

Wyznaczamy rząd macierzy głównej na podstawie definicji rzędu macierzy:

$A=\begin{bmatrix}2&3&1\\3&2&1\\2&1&3\\8&5&5\end{bmatrix}$. Obliczamy np. wyznacznik macierzy C utworzonej z trzech pierwszych wierszy macierzy A. Ponieważ $\det C=\begin{vmatrix}2&3&1\\3&2&1\\2&1&3\end{vmatrix}=-12\neq 0$, więc $R(A)=3$.

Następnie wyznaczamy rząd macierzy uzupełnionej $B=\begin{bmatrix}2&3&1&1\\3&2&1&5\\2&1&3&11\\8&5&5&21\end{bmatrix}$.

Wykonujemy następujące operacje elementarne na wierszach macierzy B: mnożymy wiersz drugi przez 2 i dodajemy do wiersza trzeciego, a następnie otrzymany wiersz trzeci odejmujemy od wiersza czwartego.

Otrzymujemy macierz $D=\begin{bmatrix}2&3&1&1\\3&2&1&5\\2&1&3&11\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ o rzędzie równym rzędowi macierzy B.

$R(D)=R(B)\leq 3$. Ponieważ $R(A)=3$ oraz $R(A)\leq R(B)$, więc $R(B)=3$.

Stąd $R(A) = R(B) = 3$, więc układ równań ma rozwiązanie (twierdzenie Kroneckera-Capellego). Korzystając ze schematu podanego w [WI 6] rozważany układ jest równoważny układowi równań Cramera o macierzy głównej C:

$$\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 3x+2y+z=5 \\ 2x+y+32=11 \end{cases}.$$

Następnie obliczamy wyznaczniki macierzy $C_K\,(k=1,2,3)$ utworzonych przez zastąpienie k-tej kolumny macierzy C kolumną wyrazów wolnych.

$$\det C_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -24,\ \det C_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & 3 \end{vmatrix} = 24,\ \det C_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 11 \end{vmatrix} = -36.$$

Stosując wzory Cramera otrzymujemy:

$$x = \frac{\det C_1}{\det C} = \frac{-24}{-12} = 2,\ y = \frac{\det C_2}{\det C} = \frac{24}{-12} = -2,\ z = \frac{\det C_3}{\det C} = \frac{-36}{-12} = 3.$$

Łatwo sprawdzić, że liczby 2, -2, 3 są również rozwiązaniami czwartego równania rozwiązywanego układu równań.

4. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 4x-6y+2w+3z=2 \\ 2x-3y+5w+7z=1 \\ 2x-3y-11w-15z=1 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Dany układ nie jest układem Cramera, należy sprawdzić czy ma on rozwiązanie (jest niesprzeczny).
Wyznaczamy rząd macierzy głównej układu:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & -11 & -15 \end{bmatrix}.$$

Można sprawdzić, że wszystkie cztery podwyznaczniki macierzy A stopnia trzeciego są równe zeru, więc rząd tej macierzy $R(A) < 3$. Ponieważ np. podwyznacznik

$$\det C = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$ więc $R(A) = 2$.

Wyznaczamy rząd macierzy uzupełnionej $B = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & -11 & -15 & 1 \end{bmatrix}$.

Wykonujemy następujące operacje elementarne na wierszach macierzy B: odejmujemy wiersz drugi od trzeciego oraz wiersz drugi pomnożony przez 2 od pierwszego. Otrzymujemy macierz:

$$D=\begin{bmatrix}0 & 0 & -8 & -11 & 0\\ 2 & -3 & 5 & 7 & 1\\ 0 & 0 & -16 & -22 & 0\end{bmatrix}.$$

Mnożąc wiersz pierwszy macierzy D przez 2 i odejmując od wiersza trzeciego mamy macierz:

$$E=\begin{bmatrix}0 & 0 & -8 & -11 & 0\\ 2 & -3 & 5 & 7 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \quad R(E)=2.$$

Ponieważ rzędy macierzy E, D, B są równe, więc $R(A)=R(B)=2$ (twierdzenie Kroneckera-Capellego).
Dany układ sprowadzamy do równoważnego układu Cramera [WI 6]. Ponieważ $\det C=-1\neq 0$, więc odrzucamy trzecie równanie danego układu oraz podstawiamy dowolne stałe $c, d\ (c, d\in R)$ za niewiadome x, y.
Otrzymujemy układ równań Cramera:

$$\begin{cases}2w+3z=2-4c+6d,\\ 5w+7z=1-2c+3d.\end{cases}$$

Obliczamy wyznaczniki macierzy C_1, C_2 utworzonych przez zastąpienie odpowiednio pierwszej i drugiej kolumny macierzy C kolumną wyrazów wolnych.

$$\det C_1=\begin{vmatrix}2-4c+6d & 3\\ 1-2c+3d & 7\end{vmatrix}=-22c+33d+11,\quad \det C_2=\begin{vmatrix}2 & 2-4c+6d\\ 5 & 1-2c+3d\end{vmatrix}=16c-24d-8.$$

Stosując wzory Cramera otrzymujemy:

$$w=\frac{\det C_1}{\det C}=\frac{-22c+33d+11}{-1}=22c-33d-11,\quad z=\frac{\det C_2}{\det C}=\frac{16c-24d-8}{-1}=-16c+24c+8,$$

$$x=c,\ y=d.$$

Rozpatrywany układ (nieoznaczony) ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od przyjętych wartości c, d. Np. dla $c=0, d=1$ otrzymujemy rozwiązanie $x=0, y=1, w=-44, z=32$.

Zadania

1. Rozwiązać metodą Cramera układy równań:

a) $\begin{cases}3x-y+2z=1\\ 2x+y-5z=4\\ x+y+z=3\end{cases}$; b) $\begin{cases}7x_1+8x_2-x_3+5x_4=40\\ 6x_1+4x_2+5x_3+3x_4=41\\ 4x_1-2x_2+5x_3+3x_4=27\\ 3x_1+5x_2-3x_3+2x_4=12\end{cases}$.

2. Rozwiązać metodą macierzową układy równań;

a) $\begin{cases} 2x+y+3z=11 \\ 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x_1-x_2-x_3-2x_4=-4 \\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6 \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-4 \\ x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \end{cases}$.
3. Rozwiązać układy równań: a) $\begin{cases} 4x-7y+z=5 \\ 3x-5y+z=2 \\ 2x-y+3z=9 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x-y+5z=3 \\ 2x-2y-3z=4 \\ x-y+2z=1 \\ x-2y-z=2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0 \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=0 \\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0 \\ x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0 \end{cases}$.
Odpowiedzi: 1. a) $1,2,0$; b) $1,2,3,4$; 2. a) $2,-2,3$; b) $-1,-1,0,1$; 3. a) układ sprzeczny; b) $\frac{10}{7},-\frac{1}{7},-\frac{2}{7}$; c) $0,0,0,C_1,C_2$.
Literatura: **Z**. Roz. I, § 4.

CI 6	*RACHUNEK WEKTOROWY*

1. Iloczyn skalarny
2. Iloczyn wektorowy
3. Iloczyn mieszany

Przykłady

Iloczyn skalarny: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\angle\left(\bar{a},\bar{b}\right)\right)$.

Postać kartezjańska iloczynu skalarnego: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y+a_z b_z$.

1. Dane są punkty $A(1,2,0), B(-3,0,5), (0,4,1)$. Znaleźć kąt między wektorami $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

Rozwiązanie

Znajdujemy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{AB}=[-4,-2,5]$, $\overrightarrow{AC}=[-1,2,1]$.

Obliczamy cosinus kąta między wektorami $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$. $\left(\varphi=K\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right)$ $\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}$

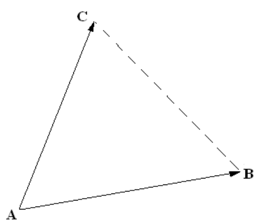
$$\cos\varphi=\frac{-4\cdot(-1)+(-2)\cdot 2+5\cdot 1}{\sqrt{4^2+2^2+5^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{3},\quad \varphi=\arccos\frac{1}{3}.$$

Iloczyn wektorowy

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\vec{i}\left(a_y b_z-a_z b_y\right)+\vec{j}\left(a_z b_x-a_x b_z\right)+\vec{k}\left(a_x b_y-a_y b_x\right)$$

2. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A(2,3,-1)$, $B(4,-2,3)$, $C(-1,4,2)$.

Rozwiązanie



Rys.

Z określenia iloczynu wektorowego wynika, że pole trójkąta *ABC* jest równe połowie długości iloczynu wektorowego wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ (rys.) [WI 7]

Wyznaczamy współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} = [4-2, -2-3, 3-(-1)] = [2,-5,4]$, $\quad \overrightarrow{AC} = [-1-2, 4-3, 2-(-1)] = [-3,1,3]$.

Iloczyn wektorowy $\overrightarrow{AB} x \overrightarrow{AC}$ wyznaczamy korzystając z postaci symbolicznej (wyznacznik) [WI 7].

$$\overrightarrow{AB} x \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -19\bar{i} - 18\bar{j} - 13\bar{k},$$

więc pole $S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} x \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{19^2 + 18^2 + 13^2} = \frac{1}{2}\sqrt{854}$ $[j^2]$.

Iloczyn mieszany

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

3. Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach $A(3,4,5)$, $B(2,1,-3)$, $C(4,-2,1)$, $D(1,2,6)$.

Rozwiązanie

Korzystamy z interpretacji geometrycznej iloczynu mieszanego [WI 7].

Objętość V równoległościanu zbudowanego na wektorach $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ o wspólnym początku równa się wartości bezwzględnej iloczynu mieszanego tych wektorów.
$V = \left|\left(\bar{a}\, x\, \bar{b}\right)\bar{c}\right|$

Objętość V_1 czworościanu zbudowanego na wektorach $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ jest równa $\frac{1}{6}$ objętości równoległościanu czyli $V_1 = \frac{1}{6}\left|\left(\bar{a}\, x\, \bar{b}\right)\bar{c}\right|$. Niech $\bar{a} = \overrightarrow{AB}$, $\bar{b} = \overrightarrow{AC}$, $\bar{c} = \overrightarrow{AD}$.

Wyznaczamy współrzędne wektorów $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

$$\bar{a} = [-1, -3, -8], \ \bar{b} = [1, -6, -4], \ \bar{c} = [-2, -2, 1].$$

Iloczyn mieszany wektorów $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ obliczamy ze wzoru (wyznacznik) podanego w [WI 7].

$$V_1 = \frac{1}{6}\left|\left(\bar{a}\, x\, \bar{b}\right)\bar{c}\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} -1 & -3 & -8 \\ 1 & -6 & -4 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\cdot 105 = \frac{35}{2} \ [j^3].$$

Zadania

1. Znaleźć wektor $\vec{x}$ prostopadły do wektorów $\vec{a} = [1, -2, 3]$ i $\vec{b} = [2, 3, -1]$ taki, że $\vec{a} \cdot \vec{d} = -6$, gdzie $\vec{d} = [2, -1, 1]$.

2. Dane są punkty $P_1(1, 2, 4)$, $P_2(5, 1, 2)$ i $P_3(3, 4, 1)$.
Znaleźć wersor wektora $\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2}\, x\, \overrightarrow{P_1P_3}$.

3. Wykazać, że wektory $\vec{a} = [3, 4, -2], \vec{b} = [6, -4, -1], \vec{c} = [-14, -1, 5]$ nie są komplanarne.

Odpowiedzi

1. $\vec{x} = [-3, 3, 3]$; 2. $\left[\frac{7}{213}, \frac{8}{213}, \frac{10}{213}\right]$.

Literatura: **Z.** Roz. II, § 3.

CI 7	***PŁASZCZYZNA I PROSTA W PRZESTRZENI R^3***

1. Płaszczyzna
2. Prosta w przestrzeni R^3
3. Odległości

Przykłady

1. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty
$A(2,0,1), B(-3,1,2), C(4,2,-3)$.

Rozwiązanie
Sposób 1.

Korzystamy ze wzoru podanego w [WI 8]
$\pi: A(x-x_o)+B(y-y_o)+C(z-z_o)=0$, gdzie $P_o(x_o, y_o, z_o) \in \pi$ i $\pi=[A,B,C]$, $\bar{n} \perp \pi$.
Znajdujemy wektor $\bar{n}=\overrightarrow{AB} x \overrightarrow{AC}$.

Wyznaczamy wektory $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
$\overrightarrow{AB}=[-3-2, 1-0, 2-1]=[-5,1,1]$, $\overrightarrow{AC}=[4-2, 2-0, -3-1]=[2,2,-4]$,

$$\bar{n}=\overrightarrow{AB} x \overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -4 \end{vmatrix}=-6\bar{i}-18\bar{j}-12\bar{k}.$$

Wyznaczamy równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $A(2,0,1)$ i prostopadłej do wektora $\bar{n}=[-6,-18,-12]$
$\pi: -6(x-2)-18(y-0)-12(z-1)=0$. Ostatecznie $\pi: x+3y+2z-4=0$

Sposób 2.

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Rozwijamy wyznacznik względem pierwszego wiersza

$$x\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0,$$

czyli $-6x-18y-12z-24=0$, więc $\pi: x+3y-2z-4=0$.

2. Wyznaczyć równanie prostej l przechodzącej przez punkty $P_1(0,2,-3)$ i $P_2(1,0,5)$.

Znaleźć odległość punktu $P_3(-2,3,1)$ od wyznaczonej prostej.

Rozwiązanie

a) Wyznaczamy równania parametryczne prostej przechodzącej przez punkt P_1 i równoległej do wektora $\overline{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$ [WI 8].

$$\overline{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = [1,-2,8], \; l: \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = -3 + 8t \end{cases}, \; t \in R.$$

Równanie kanoniczne (kierunkowe) prostej l [WI 8] $\quad l: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+3}{8}$.

b) Odległość punktu P_3 od prostej l wyznaczamy ze wzoru [WI 8]:

$$d = d(P_3, l) = \frac{\left|\overline{a}\, x\, \overrightarrow{P_1P_3}\right|}{\left|\overline{a}\right|},$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = [-2,1,4], \qquad \overline{a}\, x\, \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -2 & 8 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -16\overline{i} - 20\overline{j} - 3\overline{k},$$

$$d = \frac{\sqrt{16^2 + 20^2 + 3^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 8^2}} = \frac{\sqrt{665}}{\sqrt{69}}.$$

3. Obliczyć odległość prostych skośnych l_1 i l_2:

$$l_1: \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 6 - 3t \\ z = 3 + 2t \end{cases}, \; l_2: \frac{x-4}{8} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+7}{3}.$$

Rozwiązanie

Odległość prostych skośnych l_1, l_2:

$$d = d(l_1, l_2) = \frac{\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \vec{P_0P_1}\right|}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}\right|}{\left|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\right|}.$$

$P_0(-3,6,3) \in l_1$, $P_1(4,-1,-7) \in l_2$ $\bar{a} = [4,-3,2], \bar{a} \parallel l_1$; $\bar{b} = [8,-3,3]$, $\bar{b} \parallel l_2$.

$\overrightarrow{P_0P_1} = [7,-7,-10]$

$$\bar{a}\, x\, \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & -3 & 2 \\ 8 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -3\bar{i} + 4\bar{j} + 12\bar{k}, \qquad (\bar{a}\, x\, \bar{b})\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 8 & -3 & 3 \\ 7 & -7 & -10 \end{vmatrix} = -169,$$

$$d = d(l_1, l_2) = \frac{|-169|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = \frac{169}{\sqrt{169}} = \frac{169}{13} = 13.$$

Zadania

1. Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P(2,1,-2)$ i prostopadłej do wektora $\bar{n} = [2,-4,6]$.
2. Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkty $P_1(0,0,1), P_2(5,0,0), P_3(1,1,1)$.
3. Obliczyć kąt między prostą $l: \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ a płaszczyzną $3x - 5y - z + 2 = 0$.
4. Obliczyć odległość między prostymi l_1 i l_2:
$l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$, $l_2: \frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{6}$.
5. Obliczyć odległość punktu $P_0(1,-1,-2)$ od prostej $l: \begin{cases} x = -3 + 6t \\ y = -2 + 4t \\ z = 8 - 4t \end{cases}$.

Odpowiedzi

1. $x - 2y + 3z + 3 = 0$; 2. $x - y + 5z - 5 = 0$; 3. prosta jest równoległa do płaszczyzny;
4. $\sqrt{10}$; 5.7.

Literatura: Z. Roz. II, § 3, 4, 5, 6.

CI 8	*CIĄGI LICZBOWE GRANICA CIĄGU*

1. Monotoniczność ciągu
2. Granica ciągu

Monotoniczność ciągu

Przykład

Wykazać, że ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$ $(n > 2)$ jest ciągiem malejącym.

Rozwiązanie

Ponieważ dla dowolnego $n \in N$ $a_n > 0$, więc ciąg (a_n) będzie malejący wtedy i tylko wtedy, gdy $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, gdyż nierówność $a_n > a_{n+1}$ jest wówczas równoważna nierówności $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

$$a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{3 \cdot 3^n}{n!(n+1)}, \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \cdot 3^n}{n!(n+1)} \cdot \frac{n!}{3^n} = \frac{3}{n+1} < 1 \text{ dla } n > 2$$

czyli ciąg (a_n) jest malejący dla n > 1.

Grania ciągu

Przykład

Dany jest ciąg (a_n) o wyrazie ogólnym $a_n = \dfrac{n+1}{2-3n}$. Sprawdzić, czy granicą ciągu jest $-\dfrac{1}{3}$.

Rozwiązanie

$$\left(\lim_{n \to \infty} a_n = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{m} \bigwedge_{n > m} \Rightarrow |a_n - g| < \varepsilon \right)$$

Liczba $-\dfrac{1}{3}$ będzie granicą ciągu (a_n), jeżeli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ znajdziemy liczbę m taką, że gdy $n > m$, to $\left| a_n - \left(-\dfrac{1}{3}\right) \right| < \varepsilon$.

$$\left| a_n - \left(-\frac{1}{3}\right) \right| = \left| \frac{n+1}{2-3n} + \frac{1}{3} \right| = \left| \frac{5}{3(2-3n)} \right| = \frac{5}{3(3n-2)} < \varepsilon .$$

Otrzymaną nierówność rozwiązujemy względem n

$$\frac{5}{3(3n-2)} < \varepsilon \Leftrightarrow 5 < \varepsilon \cdot 3(3n-2) \Leftrightarrow n > \frac{5+6\varepsilon}{9\varepsilon}.$$

Wykazaliśmy, że występująca w definicji granicy nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$ jest spełniona dla wszystkich n większych od $\frac{5+6\varepsilon}{9\varepsilon}$, gdzie ε – dowolna liczba dodatnia. Istnieje więc liczba $m = \frac{5+6\varepsilon}{9\varepsilon}$, czyli $g = -\frac{1}{3}$ jest granicą danego ciągu.

Przykład

Wykazać, że $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

Rozwiązanie

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \bigwedge_{A\in R} \bigvee_{m} \bigwedge_{n\in N} \left(n > m \Rightarrow a_n > A\right)$$

Załóżmy, że $g = +\infty$, zgodnie z definicją dla dowolnej liczby rzeczywistej A spełniona musi być wówczas nierówność $a_n > A$, tzn. $n^2 > A$. Ostatnia nierówność jest spełniona dla $n > \sqrt{A}$, a więc istnieje liczba m równa np. $\sqrt{A}$, czyli granicą danego ciągu (n^2) jest $+\infty$.

Przykład

Obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)$.

Rozwiązanie

Ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n} = +\infty$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, więc mamy symbol nieoznaczony postaci $[\infty - \infty]$. Wyraz ogólny ciągu a_n przekształcamy na podstawie wzoru

$$a - b = \frac{(a-b)(a+b)}{a+b} = \frac{a^2 - b^2}{a+b},$$

$$\sqrt{n^2+n} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(\sqrt{n^2+n} + n\right)}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

Ponieważ licznik i mianownik otrzymanego ułamka dążą do ∞, więc otrzymaliśmy symbol nieoznaczony typu $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ równoważny symbolowi $[\infty - \infty]$. Wyraz ogólny $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$ możemy tak przekształcić, aby otrzymać symbol oznaczony. W tym celu dzielimy licznik i mianownik przez *n*.

Otrzymujemy

$$a_n = \frac{1}{\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}+1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.$$

Ponieważ $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right) = 2$, więc $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right) = \frac{1}{2}$.

Zadania

1. Wykazać na podstawie definicji, że:

a) $\lim\left(\frac{n}{2n-1}\right) = \frac{1}{2}$; b) $\lim\left(\frac{n^2-1}{3n^2+1}\right) = \frac{1}{3}$.

2. Obliczyć granice ciągu:

a) $\lim n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$; b) $\lim \sqrt[n]{3^n+5^n}$; c) $\lim\left(1-\frac{1}{n^3}\right)^n$.

Odpowiedzi

2. a) $\frac{1}{2}$; b) 5; c) 1.

Literatura: **Z**. Roz. III, § 1.

CI 9	***GRANICA FUNKCJI. CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI***

1. Definicja granicy
2. Granice jednostronne
3. Ciągłość funkcji
4. Obliczanie granic

Definicja granicy funkcji

Przykład

Na podstawie definicji Heinego wykazać, że $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=12.$

Rozwiązanie

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=g \Leftrightarrow \bigwedge_{(x_n),\, x_n\neq x_0,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0} \lim_{n\to\infty} f(x_n)=g$$

Niech (x_n), $x_n \neq 2$ będzie dowolnym ciągiem takim, że $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Odpowiada mu ciąg wartości funkcji $f(x_n)$ o wyrazie ogólnym

$$f(x_n)=\frac{x_n^3-8}{x_n-2}=\frac{(x_n-2)(x_n^2+2x_n+4)}{x_n-2}=x_n^2+2x_n+4,$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}(x_n^2+2x_n+4)=\lim_{n\to\infty} x_n^2+2\lim_{n\to\infty} x_n+4=2^2+2\cdot 2+4=12.$$

Z definicji wynika więc, że granicą danej funkcji w punkcie 2 jest 12.

Granice jednostronne

Przykład

Zbadać istnienie granicy funkcji $x \to f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ w punkcie $x_0 = 0$.

Rozwiązanie

Zbadamy istnienie granic jednostronnych w zerze.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{-x}{x}\right)=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1.$$

Wynika stąd, że dana funkcja nie ma granicy w zerze, gdyż granice jednostronne nie są równe.

Ciągłość funkcji

Przykład

Wykazać, że funkcja $y = \cos x$ jest ciągła dla $x \in R$.

Rozwiązanie

Funkcja $f(x)$ określona w punkcie x_0 jest ciągła w tym punkcie, jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Wykażemy (na podstawie definicji granicy Cauchy'ego), że $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$.

Wykażemy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ będzie istniała $\delta > 0$ taka, że dla wszystkich $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ wartości funkcji będą spełniały nierówność $|\cos x - \cos x_0| < \varepsilon$. Korzystamy ze wzoru

$$\cos x - \cos x_0 = -2\sin\frac{x + x_0}{2}\sin\frac{x - x_0}{2}$$

$$|\cos x - \cos x_0| = \left|-2\sin\frac{x + x_0}{2}\sin\frac{x - x_0}{2}\right| = 2\left|\sin\frac{x + x_0}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \le$$

$$\le 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right|, \text{ponieważ } \left|\sin\frac{x + x_0}{2}\right| \le 1.$$

Ponadto $\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \le \frac{|x - x_0|}{2}$, więc $|\cos x - \cos x_0| \le |x - x_0|$.

Zatem $|\cos x - \cos x_0| < \varepsilon$, gdy $|x - x_0| < \varepsilon$. Wykazaliśmy, że istnieje liczba $\delta = \varepsilon$, więc zgodnie z definicją granicy $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$, czyli funkcja jest ciągła.

Obliczanie granic

Analogicznie, jak dla ciągów, obliczanie granic funkcji na podstawie twierdzeń rozpoczynamy zawsze od sprawdzenia symbolu: jeżeli występuje symbol oznaczony, granicę otrzymujemy z twierdzeń, jeżeli natomiast jest jeden z symboli nieoznaczonych $[\infty - \infty], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [0, \infty], [\infty^0], [0^0], [1^\infty]$ musimy tak przekształcić funkcję, aby otrzymać symbol oznaczony i dopiero wtedy korzystać z twierdzeń.

Przykład

Obliczyć granicę funkcji $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$.

Rozwiązanie

Dla $x = 0$ licznik i mianownik funkcji $x \to \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$ są równe zeru, więc mamy symbol nieoznaczony typu $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Ponieważ $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$, więc $f(x) = \dfrac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 2\cdot 1 = 2.$$

Korzystaliśmy z twierdzenia $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Zadania

1. Na podstawie definicji Heinego wykazać, że nie istnieje $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$.

2. Wyznaczyć granice funkcji

a) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x+3} = -7$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$.

3. Dla jakich wartości parametru a funkcja

$$x \to f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ a & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest ciągła?

Odpowiedzi

2. a) $\dfrac{3}{4}$; b) 8; c) ∞. 3. 3

Literatura: **Z**. Roz. III, § 2, 3.

CI 10	***POCHODNA FUNKCJI***

1. Definicja pochodnej
2. Interpretacja geometryczna
3. Obliczanie pochodnych

Przykład

Na podstawie definicji obliczyć pochodną funkcji: $f(x) = \cos 2x$ w punkcie x_0.

Rozwiązanie.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0), \text{ gdzie } \Delta x = x - x_0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos 2(x_0 + \Delta x) - \cos 2x_0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin\frac{2(x_0 + \Delta x) + 2x_0}{2} \cdot \sin\frac{2(x_0 + \Delta x) - 2x_0}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2\sin(2x_0 + \Delta x)\sin\Delta x}{\Delta x} = -2\sin 2x_0 \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = -2\sin 2x_0 \cdot 1 = -2\sin 2x_0,$$

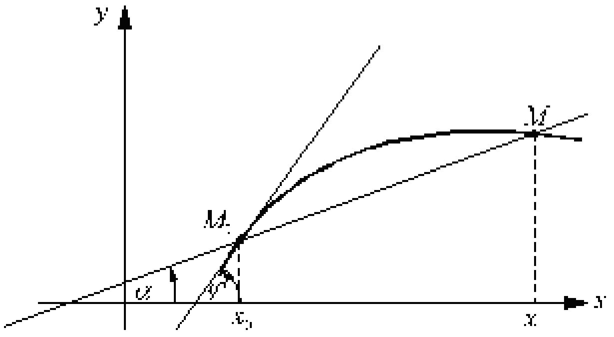
gdyż $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\Delta x}{\Delta x} = 1$.

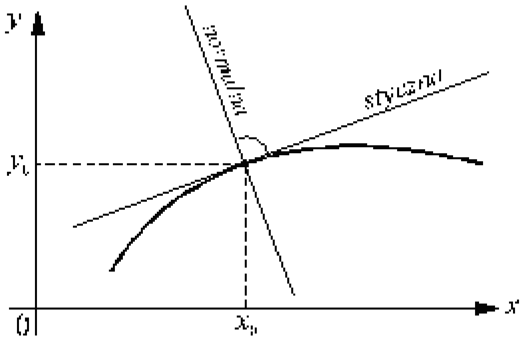
Interpretacja geometryczna pochodnej

Pochodną funkcji $y = f(x)$ interpretujemy geometrycznie jako współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ należącym do wykresu funkcji tzn. $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, α – kąt nachylenia stycznej do wykresu funkcji względem dodatniego zwrotu osi OX (rys. 1).

Równanie stycznej do krzywej $y = f(x)$ w punkcie $P_0(x_0, y_0)$ leżącym na tej krzywej jest postaci $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ przy założeniu, że istnieje $f'(x_0)$.

Równanie normalnej (prostej prostopadłej do stycznej w punkcie styczności) do krzywej $y = f(x)$ jest postaci $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ przy założeniu, że $f'(x_0) \neq 0$ (rys. 2).


Rys. 1

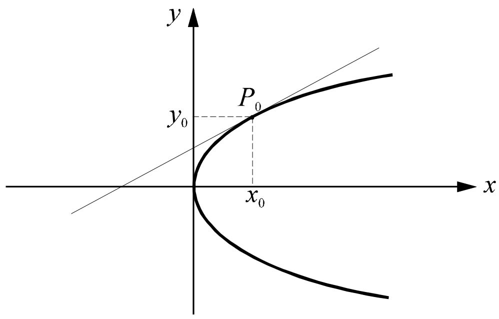

Rys. 2

Przykład

Wyprowadzić równanie stycznej do paraboli $y^2 = 2px$ w punkcie $P_0(x_0,\, y_0)$.

Rozwiązanie

Niech $p > 0$ (rys.3) (dla $p < 0$ wyprowadzenie jest analogiczne) $y^2 = 2px \Leftrightarrow (y = \sqrt{2px}$ – górna gałąź paraboli lub $y = -\sqrt{2px}$ – dolna gałąź paraboli) (rys. 3).


Rys. 3

Załóżmy dla ustalenia uwagi, że $y > 0$ (rys. 3). Znajdujemy współczynnik kierunkowy stycznej $m = f'(x_0)$

$$y' = \left(\sqrt{2px}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{2px}} \cdot 2p = \frac{p}{\sqrt{2px}}, \quad x > 0 \quad , \quad m = y'(x_0) = \frac{p}{\sqrt{2px_0}}.$$

Otrzymujemy więc szukane równanie stycznej

$$y - y_0 = \frac{p}{\sqrt{2px_0}}(x - x_0).$$

Ponieważ $y_0 = \sqrt{2px_0}$, więc $y - y_0 = \dfrac{p}{y_0}(x - x_0)$.

Pomnóżmy ostatnie równanie przez y_0, otrzymujemy $y \cdot y_0 - y_0^2 = px - px_0$, stąd $yy_0 - 2px_0 = px - px_0$. Ostatecznie równanie stycznej do paraboli $y^2 = 2px$ jest postaci $yy_0 = p(x + x_0)$.

Obliczanie pochodnych

Pochodne obliczamy w oparciu o podane reguły różniczkowania i wzór na pochodną funkcji złożonej [WI 11].

Przykład

Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \sin^3 x^3$.

Rozwiązanie

Funkcją zewnętrzną jest $f(u) = u^3$, natomiast wnętrzem funkcja $u = \sin x^3$, która również jest funkcją złożoną. Funkcją zewnętrzną jest $u = \sin v$, wnętrzem $v = x^3$. Ponieważ $(u^3)' = 3u^2, (\sin v)' = \cos v, v' = 3x^2$, więc $(\sin^3 x^3)' = 3\sin^2 x^3 \cdot \cos x^3 \cdot 3x^2 = 9x^2 \sin^2 x^3 \cdot \cos x^3$.

Zadania

1. Na podstawie definicji wyznaczyć pochodną funkcji $f(x) = 2^x$.
2. Wyznaczyć pochodne funkcji:

a) $f(x) = e^{\cos x}$; b) $f(x) = \ln(\sin 2x)$; c) $f(x) = \arcsin \dfrac{1}{x}$.

Odpowiedzi

1. $f'(x) = 2^x \ln 2$; 2. a) $f'(x) = e^{\cos x}(-\sin x)$; b) $f'(x) = 2ctg\, 2x$; c) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Literatura: **Z**. Roz. 3, § 4, 5, 6, 7.

CI 11	*POCHODNA LOGARYTMICZNA. POCHODNE WYŻSZYCH RZĘDÓW. RÓŻNICZKA FUNKCJI.*

1. Pochodna logarytmiczna
2. Pochodne wyższych rzędów
3. Różniczka funkcji

Pochodna logarytmiczna

Pochodną funkcji $y=\left[f(x)\right]^{g(x)}$ $\left(f(x)>0\right)$ obliczamy w następujący sposób:

Logarytmujemy obie strony i otrzymujemy $\ln y=\ln\left(f(x)\right)^{g(x)}$, czyli $\ln y=g(x)\ln f(x)$, a następnie różniczkujemy obie strony (traktując $\ln y$ jako funkcję złożoną)

$$\frac{1}{y}\cdot y'=g'(x)\ln f(x)+g'(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$$

Z otrzymanej równości obliczamy y' : $y'=\left[f(x)\right]^{g(x)}\left[g'(x)\ln(x)+\frac{g'(x)f'(x)}{f(x)}\right]$.

Pochodną logarytmiczną stosujemy również wówczas, gdy funkcja jest iloczynem, ilorazem, zawiera pierwiastki, potęgi (te działania, które dają się łatwo logarytmować).

Pochodne wyższych rzędów

Pochodna rzędu n $\left(n\in N\right)$ funkcji f jest pochodną pochodnej rzędu $n-1$, tzn.

$$y^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]'.$$

Funkcję *f*, która ma pochodną rzędu *n*, nazywamy funkcją *n*-krotnie różniczkowalną.

Przykład

Wyznaczyć pochodną n-tego rzędu funkcji $f(x)=5^x$.

Rozwiązanie

$f'(x)=(5^x)'=5^x\ln 5$, $f''(x)=(5^x\ln 5)'=(5^x)'\ln 5=(5^x\ln 5)\ln 5=5^x\ln^2 5$,

$f'''(x)=(5^x\ln^2 5)'=(5^x)'\ln^2 5=(5^x\ln 5)\ln^2 5=5^x\ln^3 5$. $f^{(n)}(x)=5^n\ln^n 5$ (dowód indukcyjny).

Wzór Leibniza

Jeżeli funkcja f i g są n-krotnie różniczkowalne, to

$$(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)},\quad \text{gdzie}\quad f^{(0)}=f,\qquad g^{(0)}=g.$$

Przykład

Można wykazać, że pochodna n-tego rzędu funkcji $f(x) = x \cdot 3^x$ równa się

$$f^{(n)}(x) = 3^x \ln^{n-1} 3(n + x\ln 3).$$

Różniczka funkcji

Różniczka funkcji f w punkcie x_0 dla przyrostu $dx = x - x_0$: $df(x_0) = f'(x_0)dx$.

Różniczka funkcji w punkcie x (funkcja): $df(x) = f'(x)dx$.

Różniczka n-tego rzędu $(\boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N})$

Jeżeli funkcja f jest n-krotnie różniczkowalna dla $x \in X_p$, to

$$d^n f(x) = d\left[d^{(n-1)} f(x)\right] = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Przykład

Różniczka n-tego rzędu funkcji $f(x) = 5^x$ równa się $d^n f(x) = 5^x \ln^n 5 \cdot dx^n$.

Zadania

1. Obliczyć pochodne funkcji:
a) $f(x) = (\ln x)^x$; b) $f(x) = (\sin x)^{\sin x}$

2. Wyprowadzić wzór na n-tą pochodną funkcji
a) $f(x) = \ln x$; b) $f(x) = xe^x$.

Odpowiedzi

1. a) $f'(x) = (\ln x)^{x-1}[1 + \ln x \ln(\ln x)]$, $x > e$;
b) $f'(x) = (\sin x)^{\sin x} \cos x(1 + \ln \sin x)$, $\sin x > 0$.
2. a) $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$, $x > 0$; b) $f^{(n)}(x) = e^x(x + n)$.

Literatura: **Z**. Roz. III, § 9, 10.

CI 12	*MONOTONICZNOŚĆ. EKSTREMA FUNKCJI.*

1. Monotoniczność funkcji
2. Ekstrema lokalne
3. Ekstrema globalne (wartość największa, wartość najmniejsza)

Monotoniczność funkcji

Jeżeli pochodna funkcji f jest w każdym punkcie przedziału (a,b) dodatnia (ujemna), to funkcja jest w tym przedziale rosnąca (malejąca).

Przykład

Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji $f(x)=x^3e^{-x^2}$:

Rozwiązanie

Korzystamy z podanego twierdzenia [WI 13]. Dziedzina funkcji $f(x): x\in R$.

$f'(x)=3x^2e^{-x^2}+x^3e^{-x^2}\cdot(-2x)=x^2e^{-x^2}(3-2x^2)$. Dziedzina pochodnej $f'(x): x\in R$.

$f'(x)>0$ gdy $3-2x^2>0$, stąd $x\in\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)\cup\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $f'(x)<0$, gdy $x\in\left(-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right),\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\infty\right)$. Funkcja $f(x)$ jest rosnąca w przedziałach $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right),\left(0,\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ oraz malejąca w przedziałach $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{3}{2}}\right),\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\infty\right)$.

Ekstrema lokalne

Przykład

Obliczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x)=x^3\ln x$ za pomocą pochodnej pierwszego rzędu.

Rozwiązanie

Dziedzina funkcji $f: x>0$. Obliczamy pochodną

$$f'(x)=3x^2\ln x+x^3\cdot\frac{1}{x}=x^2(3\ln x+1),\ x>0.$$

Wyznaczamy punkty, w których może wystąpić ekstremum funkcji.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2(3\ln x+1)=0 \Leftrightarrow 3\ln x+1=0,\text{ stąd } x=e^{-\frac{1}{3}}.$$

Badamy znak $f'(x)$ w sąsiedztwie punktu $x = e^{-\frac{1}{3}}$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2(3\ln x + 1) > 0 \Leftrightarrow 3\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \left(e^{-\frac{1}{3}}, \infty\right)$, $f'(x) < 0$ dla $x \in \left(0, e^{-\frac{1}{3}}\right)$.

Ponieważ w sąsiedztwie punktu $x = e^{-\frac{1}{3}}$ pochodna zmienia znak z „- na +", więc w tym punkcie funkcja ma minimum.

$$x_{\min} = e^{-\frac{1}{3}},\ y_{\min} = f\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = -\frac{e^{-1}}{3},\ P_{\min}\left(e^{-\frac{1}{3}}, -\frac{e^{-1}}{3}\right).$$

Przykład

Pewna ilość doświadczeń doprowadziła do *n* różnych wartości $x_1, x_2, ..., x_n$ badanej wielkości *x*. Gauss zaproponował przyjąć za wartość *X* taką wartość *x*, dla której suma kwadratów jej różnic z wartościami $x_1, x_2, ..., x_n$ osiąga minimum. Wyznaczyć *x*.

Rozwiązanie

$$x \to f(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + ... + (x - x_n)^2$$

Wyznaczamy ekstremum funkcji $x \to f(x)$

$$f'(x) = 2(x - x_1) + 2(x - x_2) + ... + 2(x - x_n) = 2nx - 2(x_1 + ... + x_n)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2nx - 2(x_1 + x_2 + ... + x_n) = 0 \Rightarrow x = \frac{x_1 + ... + x_n}{n},\ f''(x) = 2n.$$

Ponieważ $f''(x) > 0$, więc funkcja *f* osiąga w wyznaczonym punkcie minimum, czyli

$x_{\min} = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ (średnia arytmetyczna).

Wartość największa i wartość najmniejsza.

Przykład

Wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji $x \to f(x) = \sin 2x - x,\ x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

Rozwiązanie

1. $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(-\pi) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \sin\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

2. Wyznaczamy miejsca zerowe pochodnej w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x) = (\sin 2x - x)' = 2\cos 2x - 1, \qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}$$

Rozwiązujemy równanie $\cos 2x = \frac{1}{2}$, $2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$,

stąd $x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in C$ lub $2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ oraz $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in C$

Ponieważ $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, więc $x = -\frac{\pi}{6}$ i $x = \frac{\pi}{6}$.

$$y = f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-2\cdot\frac{\pi}{6}\right) - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} = -0{,}35$$

$$y = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin 2\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = 0{,}35.$$

3. Wartością największą danej funkcji w przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ jest $M = \frac{\pi}{2}$, natomiast wartością najmniejszą jest $m = -\frac{\pi}{2}$.

Zadania

1. Znaleźć przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = \ln^3 x - 3\ln x$.
2. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji.

$f(x) = (x-2)e^{\frac{1}{x-2}}$

3. Znaleźć wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x) = \sin x + \cos 2x$ w przedziale $\langle 0, \pi \rangle$.

Odpowiedzi

1. $(0, \frac{1}{e} > \cup < e, \infty)$ - funkcja rosnąca, $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ - funkcja malejąca.

2. $P_{\min}(3, e)$; 3. $m = 0,\ M = \frac{9}{8}$.

Literatura: **Z**. Roz. III, § 14, 15, 16.

CI 13	***PRZEDZIAŁY WYPUKŁOŚCI, WKLĘSŁOŚCI, PUNKTY PRZEGIĘCIA***

1. Przedziały wypukłości, wklęsłości wykresu funkcji
2. Punkty przegięcia

Przedziały wypukłości, wklęsłości

Jeżeli funkcja *f* ma drugą pochodną dodatnią (ujemną) w punkcie x_0 to jest wypukła (wklęsła) w tym punkcie.

Przykład

Wyznaczyć przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$.

Rozwiązanie

Dziedzina funkcji: $x\in(0,1)\cup(1,\infty)$. Obliczamy $f'(x)$ i $f''(x)$:

$$f'(x)=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x},\ f''(x)=\frac{2-\ln x}{x\ln^3 x}.$$

Dziedzina pochodnych jest taka jak dziedzina funkcji.
Badamy znak drugiej pochodnej:

$f''(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{2-\ln x}{x\ln^3 x}>0 \Leftrightarrow x\ln^3 x(2-\ln x)>0 \Leftrightarrow x\in(1,e^2)$ - funkcja wypukła,

$f''(x)<0$ dla $x\in(0,1)\cup(e^2,\infty)$ - funkcja wklęsła.

Punkty przegięcia

Jeżeli funkcja *f* dwukrotnie różniczkowalna w otoczeniu U_0 punktu x_0 spełnia warunki

a) $f''(x_0)=0$; b) $f''(x_0)>0$ dla $x>x_0$ lub $f''(x_0)>0$ dla $x<x_0$

$f''(x_0)<0$ dla $x<x_0$ $\qquad$ $f''(x_0)<0$ dla $x>x_0$

to x_0 jest punktem przegięcia (warunek konieczny i dostateczny).

Przykład

Wyznaczyć punkty przegięcia wykresu funkcji $f(x)=e^{-x^2}$.

Rozwiązanie

Obliczamy $f'(x)$ i $f''(x)$: $f'(x)=-2xe^{-x^2}$, $f''(x)=-2e^{-x^2}(1-2x^2)$, $x\in R$.

$f''(x)=0 \Leftrightarrow -2e^{-x^2}(1-2x^2)=0$, stąd $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ lub $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Następnie badamy znak $f''(x)$ w sąsiedztwie tych punktów.

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow -2e^{ix^2}(1-2x^2)>0 \Leftrightarrow 2x^2-1>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\infty\right).$$

Ponieważ w sąsiedztwie wyznaczonych punktów $f''(x)$ zmienia znak, więc funkcja *f* ma punkty przegięcia: $P_1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\, e^{-\frac{1}{2}}\right)$, $P_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\, e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

Zadania

1. Wyznaczyć przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji

a) $f(x) = 2x^2 + \ln x$; b) $f(x) = \left(\frac{x}{e}\right)^x$.

2. Wyznaczyć punkty przegięcia wykresu funkcji

a) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$; b) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$.

Odpowiedzi

1. a) $\left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; b) wypukła dla $x > 0$; 2. a) $\left(e^2, \frac{e^2}{2}\right)$; b) $(1, e)$.

Literatura: **Z**. Roz. III, § 17.

CI 14	*REGUŁY DE L'HOSPITALA. ASYMPTOTY.*

1. Reguły de L'Hospitala
2. Asymptoty wykresu funkcji

Reguły de L'Hospitala

Korzystamy z twierdzeń podanych w [WI 15].

Przykład

Obliczyć granice funkcji:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$.

Rozwiązanie

Symbol *H* nad znakiem równości oznacza, że stosujemy regułę de L'Hospitala. Ponadto zakładamy, że istnieje granica po prawej stronie równości.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x}\overset{H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x\ln 3}{1}=\ln 3$;

b) Wystąpił symbol nieoznaczony $[\infty-\infty]$ więc musimy przedstawić funkcję w takiej postaci aby wystąpił równoważny symbol $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ lub $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$. Mamy symbol nieoznaczony postaci $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ a więc możemy stosować reguły de L'Hospitala (dwukrotnie).

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\overset{H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}\overset{H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.$$

c) Mamy symbol nieoznaczony $[\infty^0]$.

Niech $h(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$, $\ln h(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$, $\ln h(x)=\sin x\ln\dfrac{1}{x}$ stąd $h(x)=e^{\sin x\ln\frac{1}{x}}$.

Następnie obliczamy $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x\ln\dfrac{1}{x}$. Wystąpił symbol nieoznaczony $[0\cdot\infty]$ więc przekształcamy funkcję i dwukrotnie stosujemy regułę de L'Hospitala.

$$\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x-x\sin x}=\frac{0}{1}=0.$$

Ostatecznie szukana granica danej funkcji równa się $e^0=1$.

Asymptoty

Przykład

Wyznaczyć równania asymptot danej krzywej: $y=x\ln\dfrac{x-1}{x}$;

Rozwiązanie

Wyznaczamy dziedzinę funkcji;

$$\frac{x-1}{x}>0 \Leftrightarrow x(x-1)>0,\ x\in(-\infty,0)\cup(1,\infty).$$

Sprawdzamy czy funkcja ma asymptoty pionowe w punktach 0 lub 1.

$\displaystyle\lim_{x\to 0^-}x\ln\frac{x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{x-1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{\frac{x-1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{1-x}=0$ wynika, stąd że prosta $x=0$ nie jest asymptotą pionową.

$\displaystyle\lim_{x\to 1^+}x\ln\frac{x-1}{x}=-\infty$ więc prosta $x=1$ jest asymptotą pionową prawostronną.

Z kolei szukamy asymptot ukośnych:

$\displaystyle m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\ln\frac{x-1}{x}=\ln 1=0$. Dla $x\to-\infty$ również $m=0$.

$\displaystyle n=\lim_{x\to\infty}\big(f(x)-mx\big)=\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{x-1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\frac{x-1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x}\overset{H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{-1}=-1$, również dla $x\to-\infty$ $m=0$. Mamy więc asymptotę poziomą $y=-1$.

Zadania

1. Obliczyć granice:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$, $a>0$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

2. Wyznaczyć równania asymptot danych krzywych:

a) $f(x)=x+\frac{\ln x}{x}$; b) $f(x)=xe^{\frac{4}{x}}-1$.

Odpowiedzi

1. a) $\ln a$; b) e; c) α; d) 1
2. a) $x=0,\ y=x$; b) $x=0, y=x+3$.

Literatura: **Z**. Roz. 3, § 18, 19.

CI 15	*BADANIE PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI*

Badanie przebiegu zmienności funkcji możemy przeprowadzić według następującego schematu:

1. Określamy dziedzinę funkcji,
2. Wyznaczamy granice funkcji na krańcach przedziałów określoności,
3. Znajdujemy punkty przecięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych,
4. Sprawdzamy, czy funkcja jest parzysta, nieparzysta lub okresowa,
5. Wyznaczamy asymptoty wykresu funkcji (pionowe, ukośne),
6. Znajdujemy ekstrema funkcji oraz przedziały monotoniczności,
7. Znajdujemy punkty przegięcia oraz przedziały wypukłości i wklęsłości,
8. Szkicujemy wykres funkcji na podstawie informacji uzyskanych w punktach 1 – 7, które można zestawić w postaci tabelarycznej.

Przykład

Zbadać przebieg zmienności funkcji $x \to f(x) = x\sqrt{1-4x^2}$.

Rozwiązania

1. Dziedziną funkcji jest przedział domknięty $\left\langle -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\rangle$ ponieważ

$$1-4x^2 \ge 0 \Leftrightarrow (1-2x)(1+2x) \ge 0 \Leftrightarrow x \in \left\langle -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\rangle .$$

2. Badamy granice funkcji dla $x \to -\frac{1}{2}+$ oraz $x \to \frac{1}{2}-$

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}+} x\sqrt{1-4x^2} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to \frac{1}{2}-} x\sqrt{1-4x^2} = 0 .$$

3. Znajdujemy punkty przecięcia wykresu funkcji z osiami układu współrzędnych

$0x$: $y=0 \Leftrightarrow x\sqrt{1-4x^2}=0 \Leftrightarrow \left(x=0 \text{ lub } x=-\frac{1}{2} \text{ lub } x=\frac{1}{2}\right)$, $0y$: $x=0 \quad y=0$.

Możemy zauważyć, że funkcja $x \to x\sqrt{1-4x^2}$ jest nieparzysta

$\left(\bigwedge_{x\in\left\langle -\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle} - f(x) = f(-x)\right)$ więc jej wykres musi być symetryczny względem początku układu współrzędnych.

Funkcja nie ma asymptot.

4. Badamy pochodną funkcji:

$$f'(x) = \sqrt{1-4x^2} + x\frac{1}{2\sqrt{1-4x^2}}(-8x) = \frac{1-8x^2}{\sqrt{1-4x^2}} .$$

Dziedziną pochodnej jest przedział otwarty $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, ponieważ $1-4x^2>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$.

Znajdujemy miejsca zerowe pochodnej: $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-8x^2=0 \Leftrightarrow \left(x=-\frac{1}{2\sqrt{2}},\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

Badamy znak pochodnej

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-8x^2>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}},\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\right),$$

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow 1-8x^2<0 \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cup\left(\frac{1}{2\sqrt{2}},\ \frac{1}{2}\right).$$

5. Ekstrema funkcji. W punkcie $x=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ pochodna zmienia znak:

$f'(x)<0$ dla $x<-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $f'(x)>0$ dla $x>-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $f'\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=0$, więc funkcja osiąga w tym punkcie minimum: $x_{\min}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\quad y_{\min}=f\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{4}$.

Analogicznie wykazujemy, że w punkcie $x=\frac{1}{2\sqrt{2}}$ funkcja osiąga maksimum:

$$x_{\max}=\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad y_{\max}=f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{4}.$$

Oczywiście punkty $P_1(x_{\min},\ y_{\min})$ i $P_2(x_{\max},\ y_{\max})$ są symetryczne względem początku układu (funkcja nieparzysta).

6. Przedziały monotoniczności. Funkcja jest rosnąca dla $x\in\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}},\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$, natomiast malejąca dla $x\in\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ oraz $x\in\left(\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$.

7. Przedziały wypukłości i wklęsłości, punkty przegięcia

$$f''(x)=\left(\frac{1-8x^2}{\sqrt{1-4x^2}}\right)'=\frac{4x(8x^2-3)}{(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2}},\ x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x(8x^2-3)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-\sqrt{\frac{3}{8}} \vee x=\sqrt{\frac{3}{8}}.$$

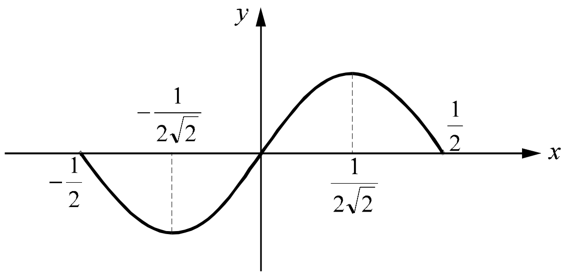
Funkcja *f* może mieć punkt przegięcia tylko w punkcie *x=0* ponieważ pozostałe punkty nie należą do dziedziny funkcji.

$f''(x).0 \Leftrightarrow \frac{4x(8x^2-3)}{(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2}}>0 \Leftrightarrow x(8x^2-3)>0 \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$, $\quad f''(x)<0$ dla $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

Wynika stąd, że funkcja *f* jest wypukła dla $x\in<-\frac{1}{2},0)$ oraz wklęsła dla $x\in(0,\frac{1}{2}>$.

Ponieważ w punkcie *x=0* pochodna $f''(x)$ zmienia znak, więc punkt $O(0,0)$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji.

8. Wykres funkcji (rys.)



Rys.

Zadania

Przeprowadzić badanie funkcji:

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$; b) $f(x) = \frac{x^2}{4-|x|}$.

Literatura: **Z**. Roz. III, § 20.