



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Materiały dydaktyczne

Mechanika

Semestr I

Wykłady



Przedmiot:		MECHANIKA									
Kierunek: Mechatronika											
Rozkład zajęć w czasie studiów – Studia pierwszego stopnia											
Semestr	Liczba tygodni w semestrze	Liczba godzin w tygodniu				Liczba godzin w semestrze					Punkty kredytowe
		A	C	L	S	Σ	A	C	L	S	
I	15	30	–	–	–	30	30	–	–	–	
Razem w czasie studiów						30	30	–	–	–	

Związki z innymi przedmiotami

- matematyka (wymagana znajomość: rachunku wektorowego, rachunku różniczkowo-całkowego),
- fizyka,
- grafika inżynierska,
- wytrzymałość materiałów,
- podstawy konstrukcji maszyn,
- automatyka i robotyka,
- siłownie okrętowe,
- budowa okrętu i wyposażenie pokładowe.

Zakres wiedzy do opanowania

Po wysłuchaniu wykładów przewidzianych programem oraz odbyciu ćwiczeń student powinien:

Znać →

1. Podstawy teoretyczne mechaniki klasycznej tzn. statyki, kinematyki i dynamiki układów mechanicznych traktowanych jako ciała doskonale sztywne.
2. Podstawy teoretyczne dotyczące drgań i dynamiki maszyn, tzn. podstawowe zagadnienia modelowania i analizy drgań układów mechanicznych liniowych o skończonej liczbie stopni swobody.

Umieć →

1. Analizować układy sił działających na rzeczywiste układy mechaniczne znajdujące się w równowadze statycznej.
2. Analizować ruch rzeczywistych obiektów mechanicznych traktowanych jako ciała doskonale sztywne.
3. Tworzyć i rozwiązywać równania dynamiczne ruchu prostych układów mechanicznych.
4. Zestawić układ pomiarowy, zarejestrować i dokonać analizy drgań mechanicznych występujących w urządzeniach mechanicznych.
5. Dokonać podstawowych pomiarów akustycznych, w szczególności hałasu emitowanego przez urządzenia mechaniczne.
6. Wywazać statycznie i dynamicznie wirniki urządzeń mechanicznych.
7. Przeprowadzić badania własności dynamicznych układów mechanicznych o jednym i o wielu stopniach swobody.
8. Zarejestrować i przeprowadzić analizę drgań skrętnych linii wałów układu napędowego.



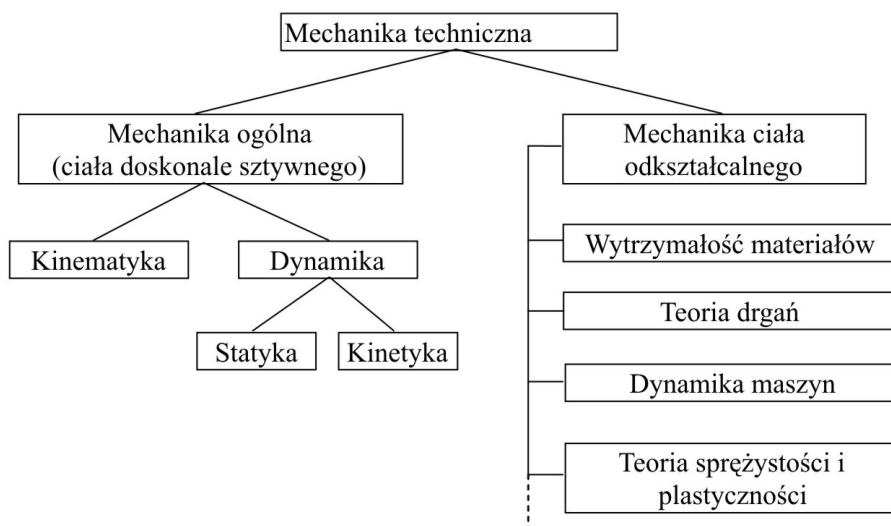
Treść zajęć wykładowych i ćwiczeniowych w semestrze I

Nr tematu	Tematy i ich rozwinięcie	Razem	W	Ć
1	Podział, zadania i podstawowe pojęcia mechaniki ogólnej. Zasady statyki. Repetytorium z rachunku wektorowego.	4	2	2
2	Redukcja zbieżnego i równoległego układu sił. Para sił i jej własności, moment pary sił (moment obrotowy).	4	2	2
3	Redukcja płaskiego układu sił: wektor główny i moment główny układu sił; redukcja tylko do wypadkowej lub tylko do pary sił.	4	2	2
4	Warunki równowagi statycznej płaskiego układu sił.	2	1	1
5	Moment siły względem osi, warunki równowagi statycznej przestrzennego układu sił. Środek sił równoległych.	4	2	2
6	Środek ciężkości ciał jednorodnych liniowych, płaskich i przestrzennych.	4	2	2
7	Momenty statyczne, bezwładności i dewiacji punktów materialnych i ciał o skończonych wymiarach (momenty geometryczne i masowe).	4	2	2
8	Rodzaje tarcia. Tarcie ślizgowe suche spoczynkowe i kinetyczne. Tarcie toczne. Tarcie w łożyskach tocznych.	6	3	3
9	Kinematyka punktu materialnego: równania ruchu i tor ruchu, prędkość i przyspieszenie punktu. Kinematyka punktu w ruchu po okręgu. Ruch harmoniczny punktu materialnego.	6	3	3
10	Kinematyka ciała doskonale sztywnego; ruch postępowy i obrotowy.	4	2	2
11	Kinematyka ciała sztywnego w ruchu płaskim: prędkości i przyspieszenia ciała i jego punktów, chwilowy środek obrotu i środek przyspieszeń.	7	3	4
12	Podstawowe pojęcia teorii mechanizmów i maszyn (człon, para i łańcuch kinematyczny, ruchliwość, więzy)	4	2	-
13	Analiza kinematyczna mechanizmów (położenia i trajektorie, środek obrotu, prędkości i przyspieszenia członu i jego punktów). Mechanizmy dźwigniowe, krzywkowe, zębate.	5	2	3
14	Dynamika punktu materialnego: podstawowe pojęcia (w tym siła bezwładności), zadania i prawa dynamiki.	4	2	2
Razem		60	30	30



Temat 1. Podział, zadania i podstawowe pojęcia mechaniki ogólnej.

Podział mechaniki technicznej i miejsce w niej mechaniki ogólnej



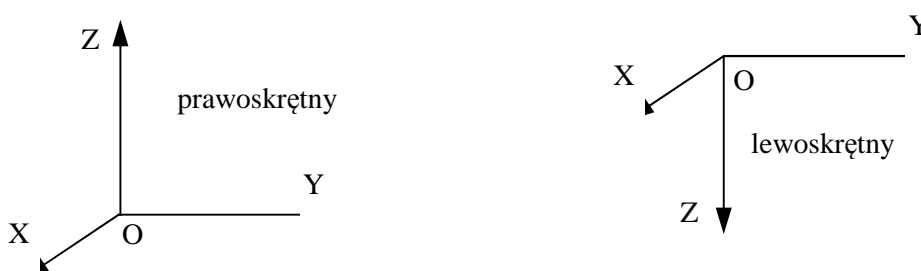
Mechanika ogólna jest działem fizyki badającym prawa rządzące ruchem ciał, przy czym kinematyka, zwana czystą geometrią ruchu, nie uwzględnia przyczyn ruchu, natomiast dynamika poszukuje związków między przyczynami ruchu tj. siłami a ich skutkami tj. parametrami ruchu np. przyspieszeniem.

Podstawowe pojęcia mechaniki ogólnej

- **Modele ciała:** punkt materialny i sztywny zbiór punktów materialnych zwany ciałem doskonale sztywnym.
- **Ruch ciała** jako zmiana położenia jednego ciała względem innego; zasada względności ruchu.
- **Przestrzeń ruchu** jest przestrzenią płaską (euklidesową).
- **Czas ruchu**, parametr numerujący kolejność zdarzeń, niezależny od układu odniesienia, od obserwatora.
- **Przyczyna ruchu** czyli najogólniej mówiąc siła jako wielkość wektorowa, będąca miarą intensywności oddziaływania ciał.

Pojęcie wielkości skalarowej (np. masy, temperatury, długości itp.) i **wektorowej** (np. prędkości, siły, itp).

Układ współrzędnych (kartezjański, prawoskrętny), reguła śruby prawoskrętnej.



W dalszych rozważaniach stosowany będzie tylko układ prawoskrętny.



Więzy; typy, charakterystyczne przypadki.

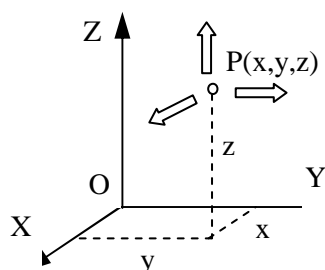
Więzy to ograniczenia nałożone na ruch ciała.

Typy więzów: idealne (bez tarcia) i nieidealne (z tarcie).

Charakterystyczne przypadki więzów spotykane najczęściej w urządzeniach mechanicznych: przegub walcowy, przegub kulisty, podpora przesuwna, utwierdzenie.

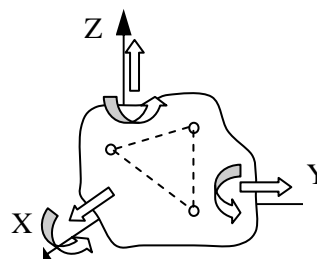
Położenie ciała w przestrzeni. Liczba stopni swobody ciała.

Punkt materialny



Punkt swobodny ma 3 stopnie swobody.
(trzy translacje względem trzech osi)

Ciało doskonale sztywne



Ciało swobodne ma 6 stopni swobody.
(trzy translacje i trzy obroty względem osi X,Y,Z)

Zasady statyki (aksjomaty, pewniki, których się nie dowodzi)

1. Zasada równoległoboku

„Dwie siły zaczepione w jednym punkcie można zastąpić jedną tylko siłą zwaną wypadkową, będącą przekątną równoległoboku zbudowanego na tych siłach”.

2. Zasada równoważenia się dwóch sił (zwaną „dwójką zerową”)

„Dwie siły pozostają w równowadze, jeżeli mają ten sam kierunek, przeciwne zwroty i tę samą wartość liczbową”.

3. Zasada układu zerowego sił

„Działanie układu sił nie ulegnie zmianie, jeżeli do układu zostanie dodany (lub od niego odejmy) układ sił równoważących się (w szczególności „dwójka zerowa”)

4. Zasada akcji i reakcji (trzecie prawo Newtona)

„Dwa ciała oddziałują na siebie siłami o tych samych kierunkach, przeciwnych zwrotach i tej samej wartości liczbowej”.

5. Zasada oswobodzenia od więzów

„Ciało nieswobodne można uwolnić od więzów, zastępując je ich siłami reakcji, i dalej rozpatrywać je jako ciało swobodne znajdujące się pod działaniem sił zewnętrznych, czynnych i sił reakcji więzów”.

6. Zasada zeszczywnienia

„Równowaga sił działających na ciało odkształcalne nie ulegnie zachwianiu, jeżeli potraktuje się to ciało jako doskonale sztywne”.

Twierdzenie o posuwności siły działającej na ciało doskonale sztywne (wynika z trzeciej zasady statyki)

„Siła działająca na ciało doskonale sztywne jest wektorem posuwnym, tzn. można ją przesuwać do dowolnego miejsca na jej linii działania”.

Literatura: [2], rozdz. 1. str. 11÷26.



Temat 2: Redukcja układów sił do najprostszej postaci

Układy sił mogą być:

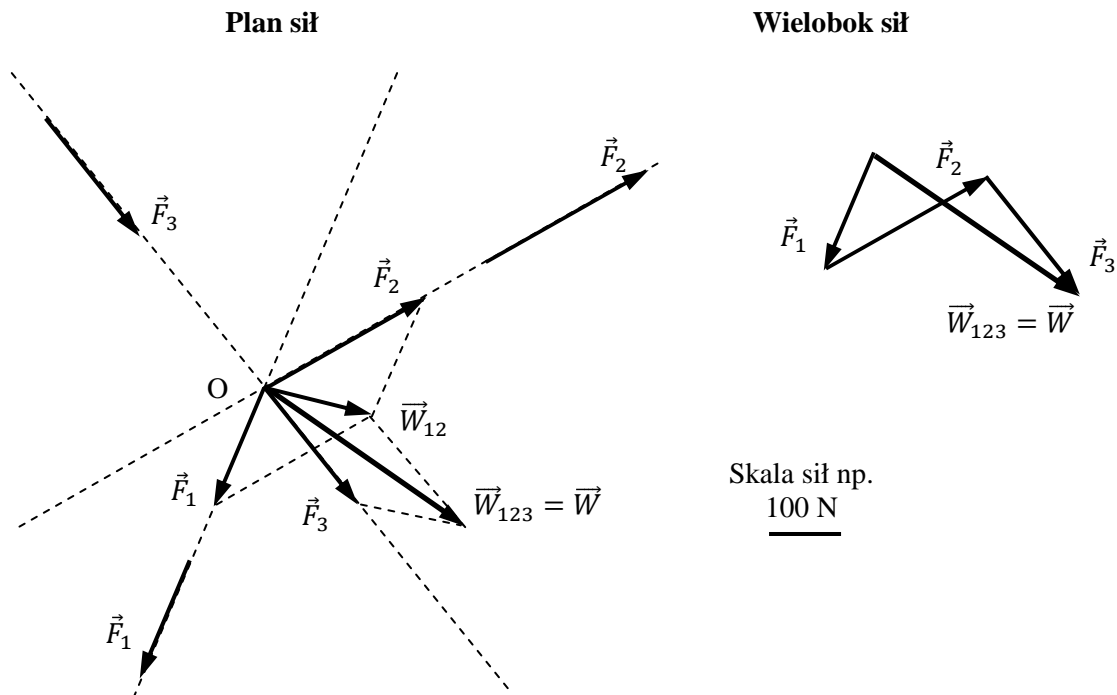
1. **Przestrzenne**, tj. o liniach działania sił rozmieszczonych dowolnie w przestrzeni.
2. **Płaskie**, tj. o liniach działania sił leżących w jednej płaszczyźnie; wśród nich wyróżnia się:
 - 1) **Układ zbieżny**, tj. o liniach działania przecinających się w jednym punkcie, np. układ elementarnych sił ciężkości działających na duże obiekty w otoczeniu Ziemi.
 - 2) **Układ równoległy dwóch sił**
 - a) o zwrotach zgodnych;
 - b) o zwrotach przeciwnych i o różnych wartościach liczbowych;
 - c) o zwrotach przeciwnych i tej samej wartości liczbowej czyli para sił.
 - 3) **Dowolny (inaczej ogólny) płaski układ sił.**

W dalszej części rozważa się prawie wyłącznie układy płaskie (ze względu na ograniczoną objętość wykładu).

2.1. Układ zbieżny

Redukcje przeprowadza się sposobem wykreślnym i analitycznym.

Sposób wykreślny (graficzny)





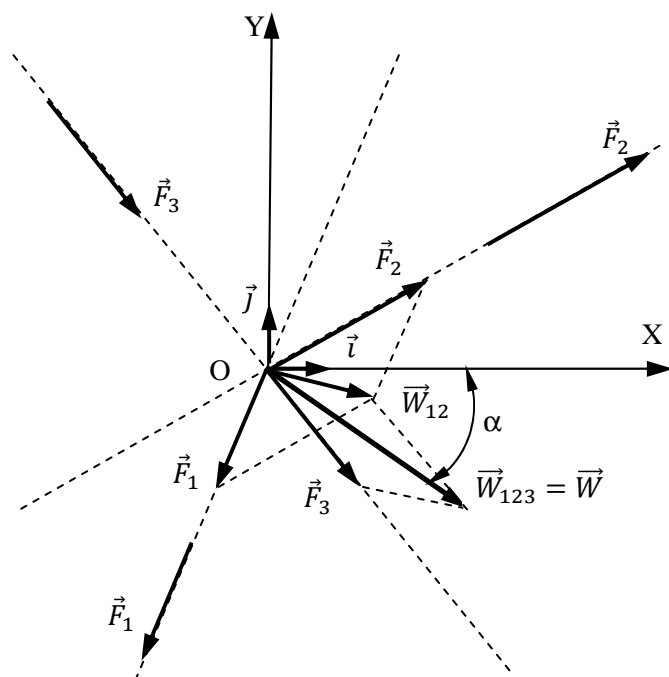
Konstrukcja wypadkowej na planie sił:

- Rozważa się układ sił zbieżnych w punkcie O.
- Na planie sił w pewnej skali narysowano układ trzech sił \vec{F}_1 , \vec{F}_2 i \vec{F}_3 .
- Siły układu zbieżnego, jako wektory posuwne, przesuwa się kolejno do punktu zbieżności O.
- Wykorzystując zasadę równoległoboku, składa się kolejno każde dwie siły przesunięte do punktu zbieżności.
- Wypadkową sił \vec{F}_1 i \vec{F}_2 jest siła \vec{W}_{12} ; wypadkową sił \vec{W}_{12} i \vec{F}_3 jest \vec{W}_{123} itd.
- W rozważanym układzie są trzy siły a ich wypadkową \vec{W} jest siła \vec{W}_{123} . Położenie jak i wartość siły wypadkowej określone są wektorem \vec{W} na planie sił.

Zauważmy, że konstrukcja wypadkowej na planie sił staje się mało czytelna przy większej liczbie sił. Bardziej czytelna jest konstrukcja wypadkowej za pomocą wieloboku sił:

- W pewnym punkcie na płaszczyźnie działania sił rysuje się w pewnej skali pierwszą z sił np. \vec{F}_1 .
- Do końca siły \vec{F}_1 zaczepia się kolejną siłę np. \vec{F}_2 , itd.
- Początek pierwszej (tutaj \vec{F}_1) i koniec ostatniej siły (tutaj \vec{F}_3) wyznaczają wektor wypadkowej \vec{W} .
- Można dowieść, na podstawie podobieństwa odpowiednich trójkątów, że wektory wypadkowej \vec{W} na planie sił i na wieloboku sił są wektorami równoległymi, o tym samym zwrocie i tej samej wartości liczbowej.

Sposób analityczny



$$\begin{aligned}\vec{F}_i &= F_{ix} \vec{i} + F_{iy} \vec{j} \\ \vec{W} &= W_x \vec{i} + W_y \vec{j} \\ W_x &= \sum_{i=1}^n F_{ix} ; \quad W_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} \\ W &= \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \\ \cos \alpha &= \frac{W_x}{W} ; \quad \sin \alpha = \frac{W_y}{W}\end{aligned}$$

Na podstawie powyższych analiz można sformułować następujące twierdzenie:

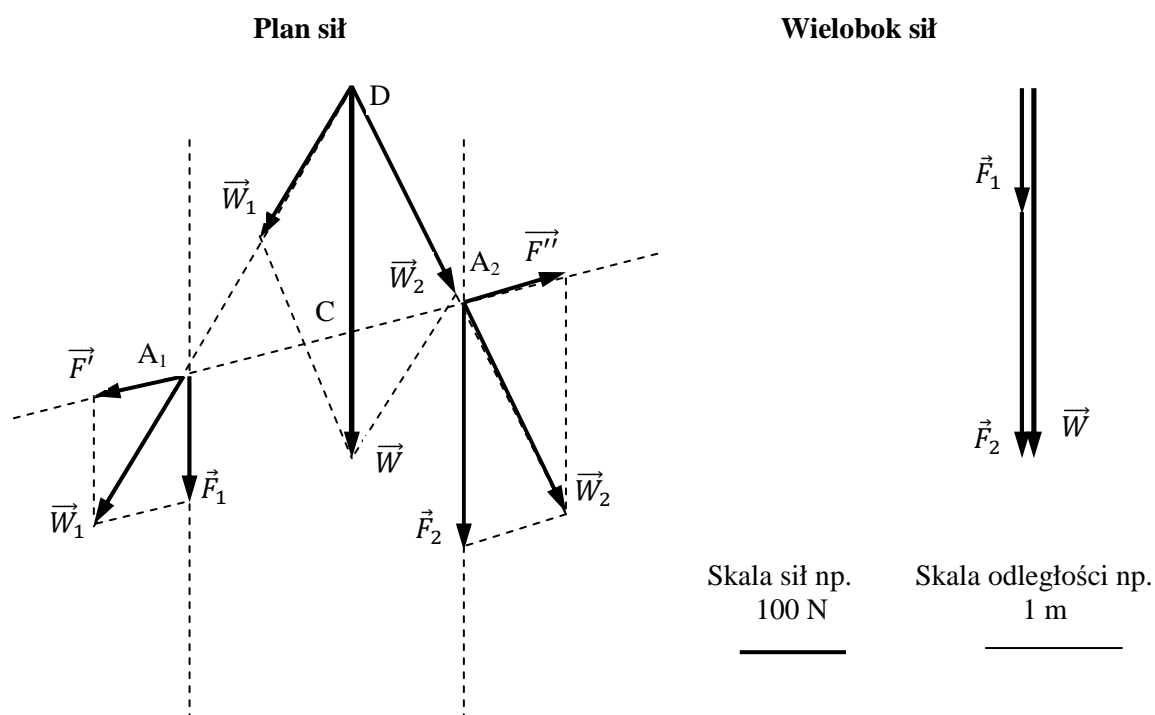


„Zbieżny układ sił można zawsze zredukować do jednej siły wypadkowej, będącej sumą geometryczną sił układu i przechodzącą zawsze przez punkt zbieżności układu”.

2.2. Układ równoległy dwóch sił o zwrotach zgodnych lub przeciwnych

Rozważa się najpierw układ dwóch sił równoległych \vec{F}_1 i \vec{F}_2 o zwrotach zgodnych, konstruując wypadkową na planie sił i za pomocą wieloboku sił.

Sposób wykreślny (graficzny)



Konstrukcja wypadkowej na planie sił:

- Przyjmuje się pewną skalę sił i pewną skalę odległości.
- Siły \vec{F}_1 i \vec{F}_2 zaczepia się w dowolnych punktach A_1 i A_2 na ich liniach działania.
- Dodaje się siły \vec{F}' i \vec{F}'' leżące na tej samej linii, mające przeciwne zwroty i tę samą wartość; , zgodnie z zasadą układu zerowego sił, nie zmieniają one działania układu sił \vec{F}' i \vec{F}'' .
- Zgodnie z zasadą równoległoboku wyznacza się wypadkowe \vec{W}_1 dla sił \vec{F}_1 i \vec{F}' oraz \vec{W}_2 dla sił \vec{F}_2 i \vec{F}'' .
- Przesuwa się wypadkowe \vec{W}_1 i \vec{W}_2 , zgodnie z twierdzeniem o posuwności sił, wzdłuż ich linii działania do punktu D zbieżności tych sił.
- Wyznacza się, zgodnie z zasadą równoległoboku, wypadkową \vec{W} sił \vec{W}_1 i \vec{W}_2 ; jest to jednocześnie wypadkowa pierwotnego układu sił \vec{F}_1 i \vec{F}_2 .



Konstrukcja wypadkowej za pomocą wieloboku sił:

- Zaczepia się w dowolnym punkcie na płaszczyźnie działania sił pierwszą siłą tj. \vec{F}_1 .
- Do jej końca zaczepia się siłą drugą tj. \vec{F}_2 .
- Początek pierwszej siły i koniec siły drugiej wyznaczają wektor wypadkowej \vec{W} sił \vec{F}_1 i \vec{F}_2 . Siła ta jest oczywiście równoległa, równa co do wartości i o tym samym zwrocie co siła wypadkowa \vec{W} wyznaczona na planie sił.

Sposób analityczny

Wartość wypadkowej \vec{W} jest na podstawie konstrukcji wieloboku sił sumą wartości sił \vec{F}_1 i \vec{F}_2 , tzn.

$$W = F_1 + F_2 \text{ [N]}$$

Położenie wypadkowej (która jest oczywiście równoległa do sił układu) na planie sił określa punkt C. Punkt ten dzieli odcinek $\overline{A_1A_2}$ na dwa odcinki $\overline{A_1C}$ i $\overline{A_2C}$. Na podstawie podobieństwa trójkątów A_1CD i trójkąta sił $\vec{F}_1 \vec{F}' \vec{W}_1$, oraz A_2CD i trójkąta sił $\vec{F}_2 \vec{F}' \vec{W}_2$ można udowodnić, że stosunek długości odcinków $\overline{A_1C}$ i $\overline{A_2C}$ jest następujący

$$\frac{A_1C}{A_2C} = \frac{F_2}{F_1}$$

tzn. jest odwrotnie proporcjonalny do wartości sił leżących przy tych odcinkach.

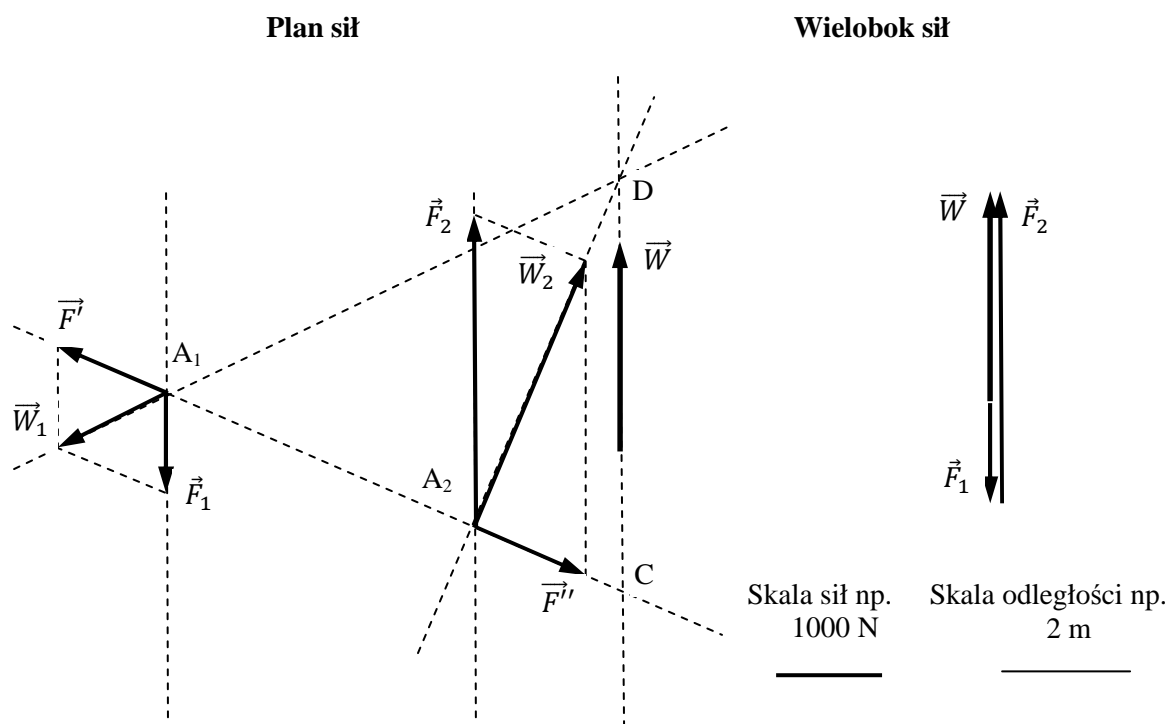
Na podstawie przeprowadzonych analiz można sformułować twierdzenie:

„Wypadkowa dwóch sił równoległych o zwrotach zgodnych leży zawsze między liniami działania sił, w odległościach od nich odwrotnie proporcjonalnych do wartości tych sił, a jej wartość jest sumą wartości tych sił”.



Rozważmy teraz układ dwóch sił równoległych o zwrotach przeciwnych i różnych wartościach liczbowych.

Sposób wykreślny (graficzny)



Wypadkową \vec{W} konstruuje się podobnie jak dla sił o zwrotach zgodnych, w sposób opisany powyżej. W tym przypadku jednak wektor \vec{W} otrzymany za pomocą wieloboku sił, przesunięto na plan sił i położono na linii działania CD, wyznaczonej punktem D, będącym punktem przecięcia linii działania wypadkowych \vec{W}_1 i \vec{W}_2 . Analityczny opis redukcji sił jest w tym przypadku następujący:

$$W = F_2 - F_1 \quad \frac{A_1C}{A_2C} = \frac{F_2}{F_1}$$

Na podstawie przeprowadzonych konstrukcji można sformułować twierdzenie:

„Wypadkowa dwóch sił równoległych o zwrotach przeciwnych i różnych wartościach liczbowych leży na zewnątrz obszaru ograniczonego liniami działania tych sił, w odległościach od tych sił odwrotnie proporcjonalnych do wartości tych sił, a jej wartość liczbową jest równa różnicy wartości siły większej i mniejszej”.

Zauważmy, że jeżeli różnica wartości sił \vec{F}_1 i \vec{F}_2 będzie maleć do zera, wówczas kierunek A_2D będzie zbliżać się do kierunku A_1D , czyli punkt przecięcia D linii działania wypadkowych \vec{W}_1 i \vec{W}_2 będzie oddalał się do nieskończoności a wartość wypadkowej \vec{W} będzie dążyć do zera. W granicznym przypadku równych wartości liczbowych sił \vec{F}_1 i \vec{F}_2 wypadkowa \vec{W} jest wektorem zerowym. Taki układ dwóch sił równoległych nazywa się parą sił.

Literatura: [2], rozdz. 2.1. str. 27÷29.



2.3. Para sił i jej własności

Definicja pary sił:

„Parą sił nazywa się dwie siły równoległe (lecz o różnych liniach działania), przeciwnych zwrotach i tej samej wartości liczbowej”.

Wypadkowa pary sił jest wektorem zerowym, lecz działanie pary sił nie jest zerowe. Przedstawia się je wektorem momentu pary sił \vec{M} .

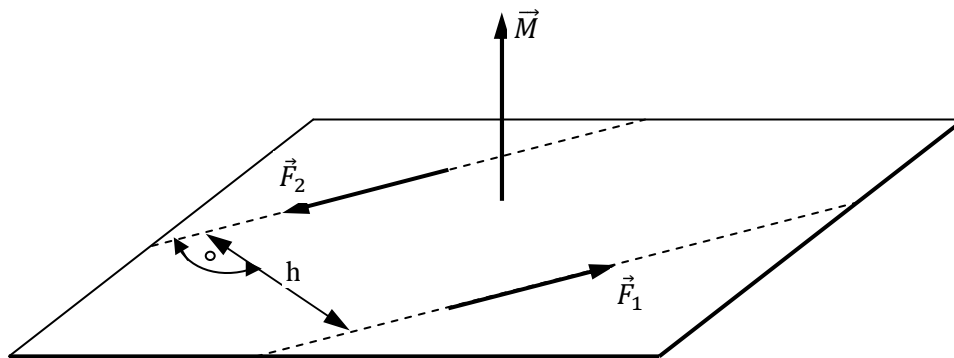
Definicja momentu pary sił \vec{M} :

- wektor \vec{M} jest prostopadły do płaszczyzny pary sił;

- zwrot wektora \vec{M} wynika z reguły śruby prawoskrętnej: śrubę prawoskrętną ustawia się jej osią prostopadle do płaszczyzny pary sił i obraca w kierunku działania pary sił (tutaj w prawo), wówczas ruch translacyjny śruby wyznacza zwrot wektora momentu pary sił (tutaj do góry);

- wartość momentu \vec{M} jest równa iloczynowi wartości sił pary $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ i ramienia pary h

$$|\vec{M}| = M = |\vec{F}_1| \cdot h = |\vec{F}_2| \cdot h \quad [\text{Nm}]$$



Własności pary sił:

- Moment pary sił nie zależy od wyboru bieguna względem którego jest wyznaczany, czyli jest wektorem swobodnym.
- Równoważność dwóch par sił oznacza równość geometryczną wektorów momentów tych par.
- Parę sił można przenieść do dowolnego miejsca na płaszczyźnie pary sił lub na płaszczyznę do niej równoległą.
- Para sił nie zmienia się, jeżeli proporcjonalnie powiększy się wartość sił i zmniejszy ramię pary (lub odwrotnie), tak aby wartość M momentu pary sił nie uległa zmianie

$$M = |\vec{F}_1| \cdot h = |\vec{F}_2| \cdot h = \text{const}$$

- Układ par sił można zastąpić jedną tylko parą o momencie równym sumie geometrycznej momentów tychże par składowych.
- Pary sił nie można zastąpić jedną tylko siłą lecz inną parą o takim samym momencie.
- Dowolny układ par sił pozostaje w równowadze jeżeli suma geometryczna momentów tychże par jest wektorem zerowym

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_i = \mathbf{0}$$

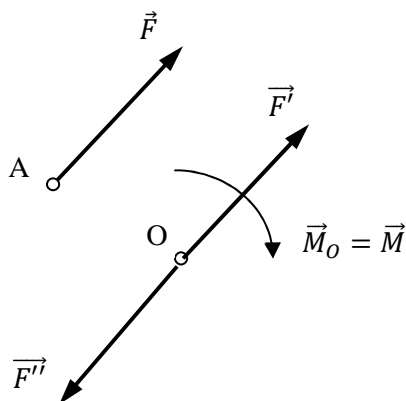
Literatura: [2] rozdz. 3.2÷3.4. str. 66÷74.



Temat 3. Redukcja dowolnego płaskiego układu sił

3.1. Redukcja siły do dowolnego punktu

Rozważa się siłę \vec{F} zaczepioną w pewnym punkcie A. Czym można ją zastąpić w pewnym innym punkcie O?



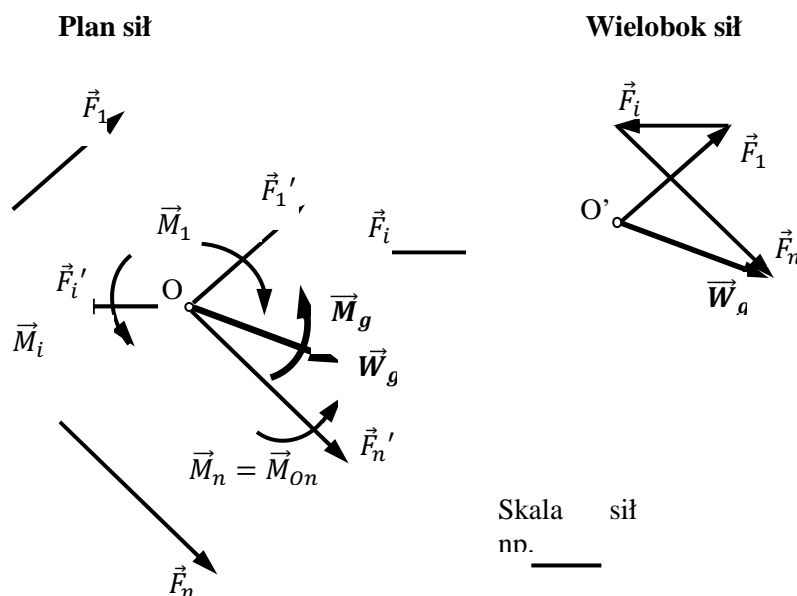
Dodajmy w punkcie O „dwójkę zerową” sił \vec{F}' i \vec{F}'' , równoległych i o przeciwnych zwrotach oraz równoległych do siły \vec{F} i o tej samej wartości jak siła \vec{F} . Siły te nie zmieniają działania układu sił. Zauważmy, że siły \vec{F} i \vec{F}'' tworzą parę sił o momencie \vec{M} równym momentowi \vec{M}_O siły \vec{F} względem punktu O.

Na podstawie powyższej analizy można sformułować twierdzenie:

„Dowolną siłę \vec{F} można zastąpić w dowolnym punkcie O siłą \vec{F}' do niej równoległą, o tej samej wartości liczbowej i tym samym zwrocie, oraz parą sił \vec{F}, \vec{F}'' o momencie równym momentowi siły \vec{F} względem punktu redukcji O”.

3.2. Wektor główny i moment główny układu sił

Redukuje się płaski układ n sił \vec{F}_i , o kierunkach dowolnie rozmieszczonych względem siebie, do pewnego dowolnego punktu O.





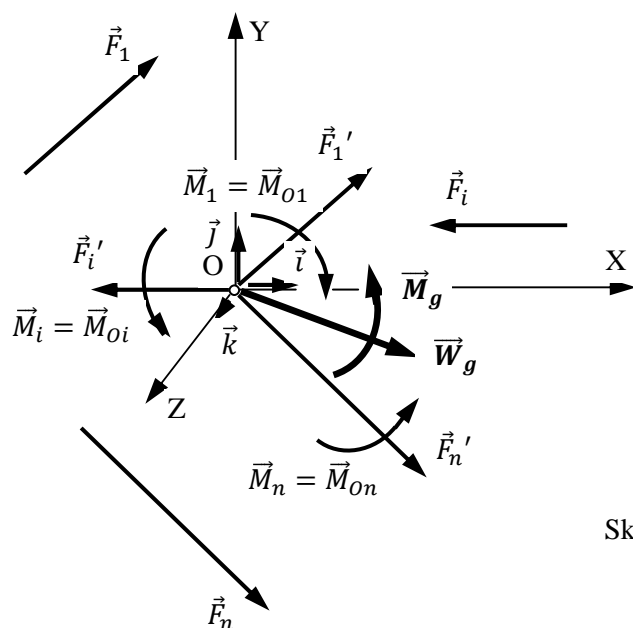
- Każdą z sił \vec{F}_i układu zastępuje się w punkcie O, na podstawie wyżej udowodnionego twierdzenia (punkt 3.2), siłą \vec{F}_i' oraz parą sił \vec{F}_i, \vec{F}_i'' o momencie \vec{M}_i równym momentowi \vec{M}_{Oi} siły \vec{F}_i względem punktu redukcji.
- Układ zbieżny n sił \vec{F}_i można zastąpić (na podstawie 2.1) jedną tylko siłą wypadkową \vec{W}_g zwaną wektorem głównym układu sił.
- Układ n par sił o momentach \vec{M}_i można zastąpić (na podstawie 2.3) jedną tylko parą sił o momencie \vec{M}_g zwanym momentem głównym układu sił.

Na podstawie powyższej analizy można sformułować twierdzenie:

„Dowolny płaski układ sił można zawsze zredukować w dowolnym punkcie do wektora głównego \vec{W}_g , który jest sumą geometryczną sił układu oraz do pary sił o momencie \vec{M}_g równym sumie geometrycznej momentów sił układu względem punktu redukcji”.

$$\vec{W}_g = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i' = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \vec{M}_g = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{Oi}$$

Analityczny opis wektora głównego \vec{W}_g i momentu głównego \vec{M}_g .



Skala sił np.
1000 N

$$\vec{F}_i = F_{ix} \cdot \vec{i} + F_{iy} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{W}_g = W_{gx} \cdot \vec{i} + W_{gy} \cdot \vec{j}$$

$$W_{gx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} \quad [N]$$

$$W_{gy} = \sum_{i=1}^n F_{iy} \quad [N]$$

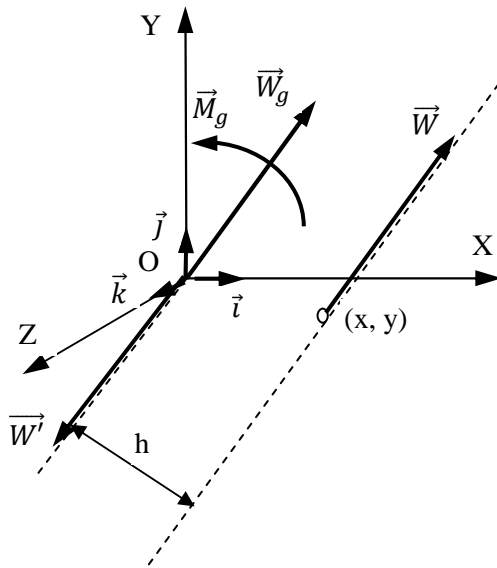
$$W_g = \sqrt{W_{gx}^2 + W_{gy}^2} \quad [N]$$

$$\vec{M}_g = M_{gz} \cdot \vec{k} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{Oi} =$$

$$= \sum_{i=1}^n (F_{iy} \cdot x_i - F_{ix} \cdot y_i) \quad [Nm]$$

3.3. Redukcja płaskiego układu sił tylko do wypadkowej lub tylko do pary sił

Założmy, że płaski układ sił został zredukowany w punkcie O do wektora głównego $\vec{W}_g \neq 0$ i pary sił o momencie \vec{M}_g . Połóżmy w punkcie O układ współrzędnych OXYZ.



- Przyjmijmy parę sił \vec{W} i \vec{W}' równoległych do \vec{W}_g , o wartościach równych wartości W_g leżących w odległości $h = M_g/W_g$ czyli o momencie równym \vec{M}_g .
- Siły \vec{W}' i \vec{W}_g tworzą „dwójkę zerową”, można je więc odjąć od układu.
- Pozostaje jedynie siła \vec{W} , zwana wypadkową, zastępująca działanie całego układu n sił.

Równanie linii działania wypadkowej

Moment wypadkowej \vec{W} zastępującej działanie całego układu sił jest równy momentowi głównemu \vec{M}_g , czyli na podstawie tw. Varignona można napisać równanie

$$\vec{M}_g = M_{gz} \cdot \vec{k} = (W_y \cdot x - W_x \cdot y) \cdot \vec{k}$$

czyli

$$M_{gz} = W_y \cdot x - W_x \cdot y = W_{gy} \cdot x - W_{gx} \cdot y$$

stąd po przekształceniach otrzymuje się równanie linii działania wypadkowej w postaci kierunkowej

$$y(x) = \frac{W_{gy}}{W_{gx}} x - \frac{M_{gz}}{W_{gx}}$$

Na podstawie powyższych analiz można sformułować twierdzenia:

„Jeżeli wektor główny jest niezerowy $\vec{W}_g \neq 0$, to płaski układ sił można zredukować do jednej tylko siły wypadkowej \vec{W} równoległej, o tym samym zwrocie i tej samej wartości liczbowej jak wektor główny”.

„Jeżeli wektor główny jest wektorem zerowym $\vec{W}_g = 0$, to płaski układ sił można zredukować co najwyżej do pary sił o momencie równym momentowi głównemu \vec{M}_g ”.

„Jeżeli $\vec{W}_g = 0$ i $\vec{M}_g = 0$ to układ sił pozostaje w równowadze”.

Literatura: [2] rozdz. 4. str. 75÷81.



Temat 4: Warunki równowagi statycznej płaskiego układu sił

Warunki ogólne (wektorowe)

Wektor główny \vec{W}_g i moment główny \vec{M}_g muszą być jednocześnie równe zero

$$\vec{W}_g = \mathbf{0} \quad \vec{M}_g = \mathbf{0}$$

Warunki wykreślne (graficzne)

Aby wektor główny był zerowy $\vec{W}_g = 0$ wielobok sił musi być zamknięty.

Aby moment główny był zerowy $\vec{M}_g = 0$ tzw. wielobok sznurowy musi być zamknięty.

Warunki analityczne inaczej równania równowagi statycznej

Wektor główny na płaszczyźnie OXY jest zerowy jeżeli jego składowe na osiach OX i OY są zerowe, a moment główny jest zerowy, jeżeli suma momentów sił układu względem dowolnego punktu A płaszczyzny OXY jest równa 0

$$W_{gx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad W_{gy} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad M_{gz} = \sum_{i=1}^n M_{iA} = 0$$

lub alternatywne dwa układy równań

$$W_{gx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_{iA} = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_{iB} = 0 \quad x \text{ nie jest } \perp \text{ pr. } AB$$

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_{iB} = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_{iC} = 0 \quad \text{punkty A, B i C niewspółliniowe}$$

Twierdzenie o równowadze trzech sił nierównoległych

„Aby trzy siły nierównoległe mogły być w równowadze muszą być zbieżne”.

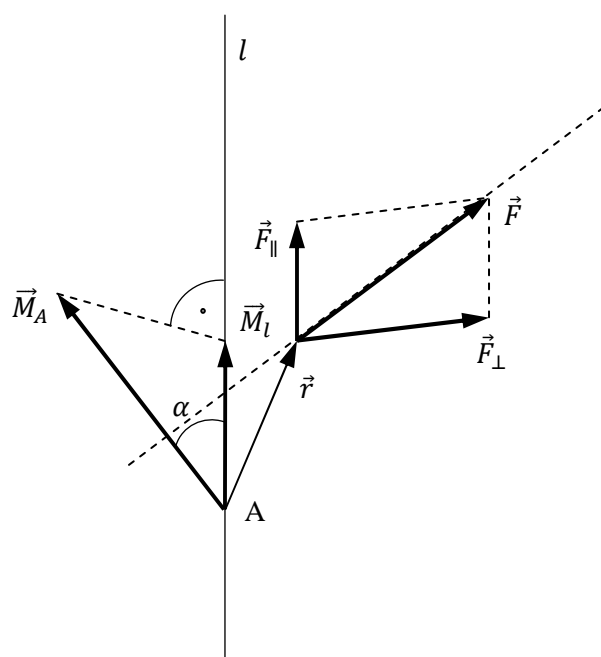
Literatura: [2] rozdz. 4. str. 82÷95.



Temat 5. Wybrane zagadnienia układu sił przestrzennych

5.1. Moment siły względem osi

Rozważmy siłę \vec{F} w ogólności skośną względem pewnej osi l .



- Rozłożmy siłę \vec{F} na dwie składowe: \vec{F}_{\parallel} i \vec{F}_{\perp} ; Moment względem osi l ma jedynie składowa \vec{F}_{\perp} .
- Wyznamy moment \vec{M}_A siły \vec{F} względem dowolnego punktu A leżącego na osi l
$$\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{F}$$
- Zrzutujemy prostokątnie \vec{M}_A na oś l .
- Można udowodnić, że rzut ten jest momentem \vec{M}_l siły \vec{F}_{\perp} względem osi l , czyli momentem siły \vec{F} względem osi l . Stąd

$$\vec{M}_l = |\vec{M}_A| \cos \alpha$$

Można sformułować następujące twierdzenie:

„Momentem siły względem osi jest rzut na tę oś wektora momentu tejże siły, wyznaczonego względem dowolnego punktu tej osi”.

Literatura: [2] rozdz. 7.6. str. 152÷155.

5.2. Warunki równowagi statycznej przestrzennego układu sił.

Dowolny układ sił, podobnie jak układ płaski, można zawsze zredukować w dowolnym punkcie do wektora głównego \vec{W}_g i momentu głównego \vec{M}_g . Aby układ był w równowadze statycznej, oba wektory muszą być jednocześnie zero.

Stąd warunki ogólne (inaczej wektorowe)

$$\vec{W}_g = 0 \quad \vec{M}_g = 0$$

Nie istnieją oczywiście, jak w przypadku płaskiego układu sił, warunki wykreślne (graficzne).

Warunki analityczne (inaczej warunki równowagi statycznej) są układem sześciu równań. Pierwsze trzy warunkują zerowanie się składowych wektora głównego na osiach układu OXYZ, natomiast trzy kolejne zerowanie się rzutów wektora momentu głównego na osie układu OXYZ, czyli momentów sił układu względem osi układu OXYZ



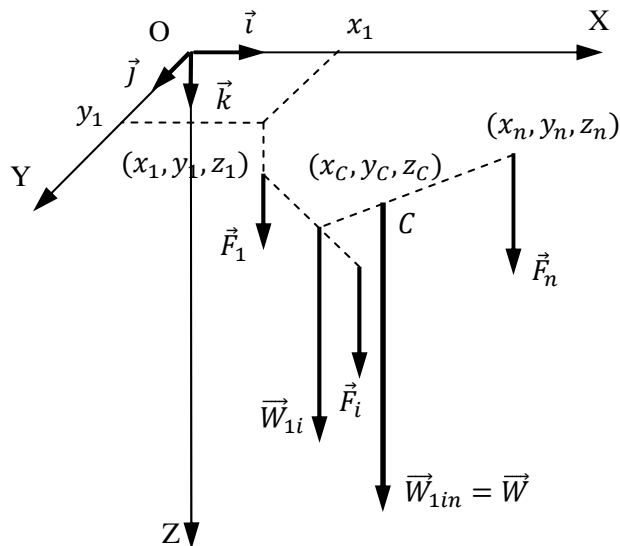
$$W_{gx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad W_{gy} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad W_{gz} = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0$$

$$M_{gx} = \sum_{i=1}^n M_{ix} = 0; \quad M_{gy} = \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0; \quad M_{gz} = \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0$$

Literatura: [2] rozdz. 8.2. str. 165÷172.

5.2. Środek sił równoległych.

Rozważa się układ n sił równoległych \vec{F}_i o niezmiennych wartościach i stałych punktach zaczepienia. Założenia te spełniają elementarne siły ciężkości ciał o niewielkich rozmiarach względem globu ziemskiego, a więc nawet największe budowle inżynierskie: mosty, wieże, statki itp.



Założenia:

$$\vec{F}_i \parallel \vec{F}_j \parallel OZ$$

$$F_i = \text{const}$$

$$(x_i, y_i, z_i) = \text{const}$$

Składając dwie kolejne siły równoległe układu (w sposób opisany w pkt. 2.2), np. \vec{F}_1 i \vec{F}_i otrzymuje się wypadkową \vec{W}_{1i} zaczepioną w punkcie leżącym na odcinku wyznaczonym punktami zaczepienia sił \vec{F}_1 i \vec{F}_i . Po złożeniu wszystkich sił układu otrzymuje się wypadkową \vec{W} zaczepioną w pewnym punkcie C.

Dokonajmy obrotu wszystkich sił układu wokół ich stałych punktów zaczepienia o ten sam kąt α w płaszczyznach równoległych do np. płaszczyzny OXZ. Okaże się, że ze względu na przyjęte założenia, wypadkowa \vec{W} ulegnie obrotowi o kąt α , lecz dalej będzie zaczepiona w tym samym punkcie C(x_C, y_C, z_C).

Punkt ten nazwano środkiem sił równoległych spełniających powyższe założenia.

Współrzędne środka sił równoległych.

Na podstawie definicji momentu siły względem osi można napisać dla 1-ej i i-tej siły

$$\vec{M}_{1y} = -\vec{j} (F_{1z}x_1) \text{ oraz } \vec{M}_{iy} = -\vec{j} (F_{iz}x_i)$$

oraz dla całego układu n sił

$$\vec{M}_y = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{iy} = \sum_{i=1}^n [-\vec{j} (F_{iz}x_i)] = -\vec{j} \sum_{i=1}^n (F_{iz}x_i)$$



Analogicznie dla wypadkowej

$$\vec{W} = \sum_{i=1}^n F_{iz}$$

moment wypadkowej jest równy

$$\vec{M}_y = -\vec{j} W_z = -\vec{j} \sum_{i=1}^n F_{iz}$$

stąd z porównania obu powyższych momentów otrzymuje się wyrażenie określające współrzędną x_C

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n (F_{iz} x_i)}{\sum_{i=1}^n F_{iz}}$$

Analogiczne rozumowania prowadzą do wyrażeń określających współrzędne y_C i z_C

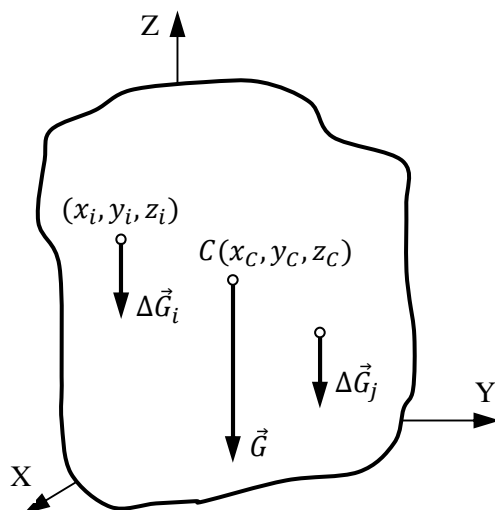
$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n (F_{iz} y_i)}{\sum_{i=1}^n F_{iz}} \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n (F_{iz} z_i)}{\sum_{i=1}^n F_{iz}}$$

Literatura: [2] rozdz. 9.1. str. 180÷186.

Temat 6: Środek ciężkości ciała

Rozważa się ciała o rozmiarach, jak wspomniano już w punkcie 5.3, niewielkich względem globu ziemskiego. Rozważania dotyczą więc największych nawet budowli, konstrukcji inżynierskich jak np. statków, mostów, wież, żurawi portowych i budowlanych, wież wiertniczych itp.

Współrzędne środka ciężkości i tw. podstawowe o środku ciężkości.



Elementarne siły ciężkości rozważanego ciała spełniają założenia, analogiczne do założeń przyjętych dla rozważanego wcześniej układu sił równoległych

$$\Delta \vec{G}_i \parallel \Delta \vec{G}_j$$

$$\Delta G_i = \text{const}$$

$$(x_i, y_i, z_i = \text{const})$$

Istnieje więc taki punkt $C(x_C, y_C, z_C)$ zwany środkiem ciężkości ciała, w którym niezmiennie jest zaczepiona wypadkowa \vec{G} elementarnych sił ciężkości ciała.

Na podstawie rozważań punktu 5.3. można określić wyrażenia na współrzędne środka ciężkości



$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta G_i x_i)}{\sum_{i=1}^n \Delta G_i} = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta V_i \rho_i g x_i)}{\sum_{i=1}^n (\Delta V_i \rho_i g)} = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta V_i \rho_i x_i)}{\sum_{i=1}^n (\Delta V_i \rho_i)} = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta m_i x_i)}{\sum_{i=1}^n \Delta m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta m_i x_i)}{m}$$

gdzie:

ρ_i [kg/m³] gęstość ciała w i-tym punkcie;

$g \cong 9.81$ [m/s²] przyspieszenie ziemskie;

Δm_i [kg] masa i-tego elementu ciała;

$m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i$ [kg] masa ciała;

$\Delta m_i x_i = \Delta S_{OYZi}$ [kgm] elementarny masowy moment statyczny ciała względem płaszczyzny OYZ.

Analogicznie można wyznaczyć wzory określające pozostałe współrzędne środka ciężkości C. Ostatecznie otrzymano wyrażenia:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta m_i x_i)}{m}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta m_i y_i)}{m}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta m_i z_i)}{m}$$

Jeżeli powyższe wyrażenia zapisze się w innej postaci, otrzyma się **podstawowe twierdzenie o środku ciężkości**:

$$\sum_{i=1}^n (\Delta m_i x_i) = m x_C \quad \sum_{i=1}^n (\Delta m_i y_i) = m y_C \quad \sum_{i=1}^n (\Delta m_i z_i) = m z_C$$

„Rzeczywisty moment statyczny ciała wyznaczony względem dowolnej płaszczyzny (lub w przypadku układów płaskich względem dowolnej osi) jest równy momentowi statycznemu całego ciała skupionego w jego środku ciężkości”.

Ponadto łatwo udowodnić inną postać powyższego twierdzenia:

„Moment statyczny ciała wyznaczony względem płaszczyzny (w układzie płaskim względem osi) przechodzącej przez środek ciężkości, jest równy zero”.

6.2. Środek ciężkości ciała jednorodnego.

W ciele jednorodnym gęstość ciała ρ w każdym punkcie ciała jest taka sama, przy czym rozróżnia się ciała:

- objętościowe (trójwymiarowe) $\rho_v = \rho$ [kg/m³] (większość rzeczywistych ciał)
- powierzchniowe (dwuwymiarowe) ρ_p [kg/m²] (np. blachy, powłoki, itp.)
- liniowe (jednowymiarowe) ρ_l [kg/m] (np. liny, pręty, itp.).

Współrzędne środka ciężkości ciała jednorodnego objętościowego można otrzymać na podstawie wyrażen dla ciała jednorodnego

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta G_i x_i)}{\sum_{i=1}^n \Delta G_i} = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta V_i \rho_i g x_i)}{\sum_{i=1}^n (\Delta V_i \rho_i g)} = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta V_i x_i)}{\sum_{i=1}^n \Delta V_i} = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta V_i x_i)}{V}$$

i analogicznie



$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta V_i y_i)}{V}$$

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta V_i z_i)}{V}$$

Podobne wzory można otrzymać dla ciała powierzchniowego i liniowego, przy czym w miejsce objętości należy podstawić pole powierzchni lub długość linii.

Z powyższego wynika twierdzenie:

„Środek ciężkości ciała jednorodnego jest jego środkiem geometrycznym”.

Ponadto można łatwo udowodnić twierdzenie

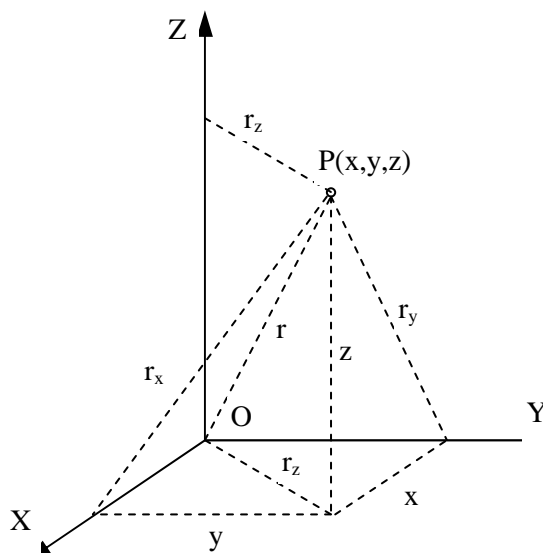
„Jeżeli ciało jednorodne posiada płaszczyznę, oś lub środek symetrii to jego środek ciężkości leży na tej płaszczyźnie, na tej osi lub w tym środku symetrii”.

Literatura: [2] rozdz. 9.2. str. 187÷211.

Temat 7: Momenty bezwładności i dewiacji (geometryczne i masowe)

Momenty te są pewnymi wskaźnikami charakteryzującymi geometrię lub rozkład masy ciała w przestrzeni.

7.1. Momenty bezwładności i dewiacji punktu materialnego względem elementów układu OXYZ



Momenty bezwładności punktu o masie m
- względem płaszczyzn układu (tzw. płaszczyznowe)

$$I_{OXY} = mz^2 \quad [\text{kgm}^2]$$

$$I_{OXZ} = my^2$$

$$I_{OYZ} = mx^2$$

- względem osi układu (tzw. osiowe)

$$I_x = mr_x^2 = m(y^2 + z^2) \quad [\text{kgm}^2]$$

$$I_y = mr_y^2 = m(x^2 + z^2)$$

$$I_z = mr_z^2 = m(x^2 + y^2)$$

- względem bieguna O (tzw. biegunowy)

$$I_O = mr^2 = m(x^2 + y^2 + z^2) \quad [\text{kgm}^2]$$



Można sformułować twierdzenia:

$$I_{OXY} + I_{OXZ} + I_{OYZ} = I_O$$

$$I_x + I_y + I_z = 2I_O$$

Momenty dewiacji (inaczej odśrodkowe) punktu materialnego o masie m względem płaszczyzn układu OXYZ

$$D_{xy} = mxy \text{ [kgm}^2\text{]}$$

$$D_{yz} = myz$$

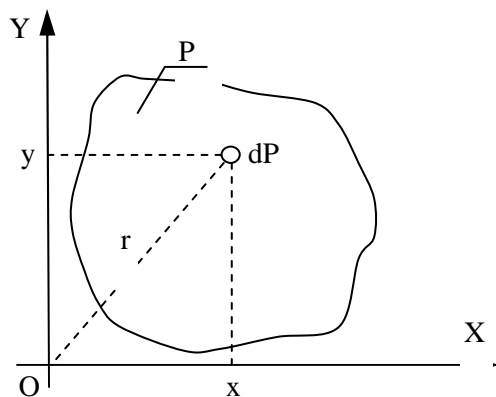
$$D_{zx} = mzx$$

7.2. Momenty bezwładności i dewiacji ciała płaskiego względem elementów układu OXY

Dla jednorodnego ciała płaskiego o gęstości powierzchniowej ρ_p między momentem materialnym i geometrycznym zachodzi zależność

$$\mathbf{I} = I \rho_p ; \mathbf{D} = D \rho_p$$

W dalszym ciągu rozważa się więc tylko momenty geometryczne.



Elementarne momenty bezwładności i dewiacji ciała

- względem osi układu (tzw. osiowe)

$$dI_x = y^2 dP \text{ [m}^4\text{]}$$

$$dI_y = x^2 dP$$

- względem bieguna O (tzw. biegunowy)

$$dI_O = r^2 dP \text{ [m}^4\text{]}$$

- moment dewiacji względem osi OX i OY

$$dD_{xy} = xy dP \text{ [m}^4\text{]}$$

gdzie dP jest różniczką pola powierzchni w m^2 .

Całkowite momenty bezwładności i dewiacji ciała otrzymuje się po zsumowaniu momentów elementarnych po całej powierzchni ciała P, czyli po scałkowaniu różniczek momentów bezwładności i dewiacji

$$I_x = \int dI_x = \int y^2 dP \text{ [m}^4\text{]}$$

$$I_y = \int dI_y = \int x^2 dP$$

$$I_O = \int dI_O = \int r^2 dP = \int (x^2 + y^2) dP \text{ [m}^4\text{]}$$

$$D_{xy} = \int dD_{xy} = \int xy dP \text{ [m}^4\text{]}$$



Można sformułować następujące twierdzenie:

$$I_x + I_y = I_O$$

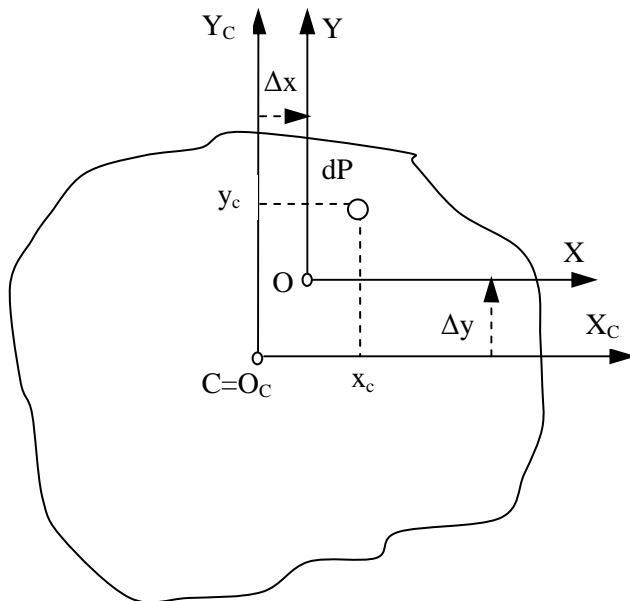
„Suma momentów bezwładności względem dwóch osi wzajemnie prostopadłych jest równa momentowi bezwładności względem bieguna będącego częścią wspólną tych osi”.

Promień bezwładności ciała względem osi lub bieguna:

„Jest to taka odległość i_l od osi l lub i_A od bieguna A , że całe ciało skupione w tej odległości od osi l lub bieguna A ma moment bezwładności równy momentowi rzeczywistemu I_l lub I_A ”.

$$i_l = \sqrt{\frac{I_l}{P}} \quad [\text{m}]; \quad i_A = \sqrt{\frac{I_A}{P}} \quad [\text{m}]$$

7.3. Transformacja momentów bezwładności i dewiacji przy równoległym przesunięciu osi. Twierdzenia Steinera.



Transformacja współrzędnych przy równoległym przesunięciu osi OX i OY o Δx i Δy

$$x = x_c - \Delta x$$

$$y = y_c - \Delta y$$

Momenty bezwładności i dewiacji względem osi OX i OY przesuniętych w stosunku do osi $O_C X_C$ i $O_C Y_C$ o Δx i Δy są określone całkami

$$I_x = \int y^2 dP \quad [\text{m}^4]$$

$$I_y = \int x^2 dP$$

$$D_{xy} = \int xy dP \quad [\text{m}^4]$$

Rozważa się zmianę momentów bezwładności i dewiacji ciała płaskiego przy równoległym przesunięciu. Po obliczeniu powyższych całek otrzymuje się wzory wyrażające treść twierdzeń Steinera:

$$I_x = I_{x_c} + P \cdot \Delta y^2 \quad [\text{m}^4]$$

$$I_y = I_{y_c} + P \cdot \Delta x^2$$

$$D_{xy} = D_{x_c y_c} + \Delta x \cdot \Delta y \cdot P \quad [\text{m}^4]$$

“Moment bezwładności ciała względem danej osi jest równy sumie momentu bezwładności ciała względem osi do niej równoległej i przechodzącej przez środek ciężkości C ciała, oraz iloczynu pola powierzchni ciała i kwadratu odległości między osiami”.



Łatwo wykazać również prawdziwość następującego twierdzenia:

„Spośród momentów bezwładności wyznaczonych względem pęku prostych równoległych, najmniejszym jest moment bezwładności wyznaczony względem prostej przechodzącej przez środek ciężkości ciała”.

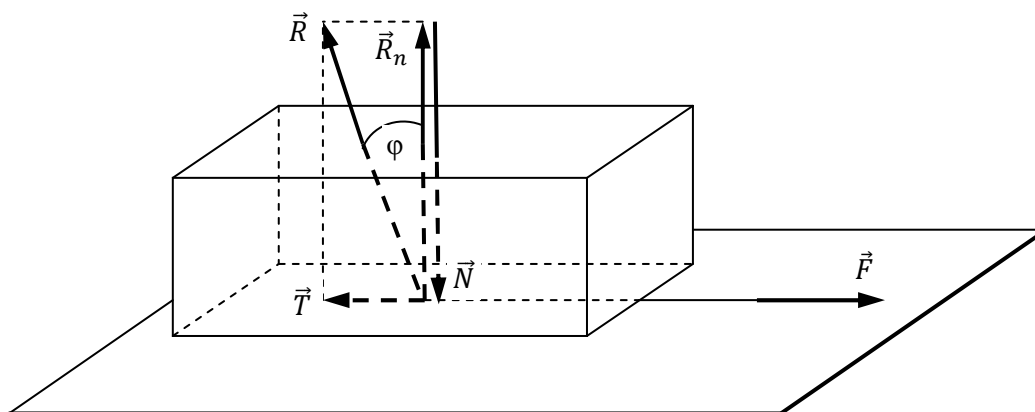
Literatura: [3] rozdz. 7. str. 142÷170.

Temat 8: Tarcie

Spośród wielu rodzajów tarcia rozważa się tutaj jedynie tarcie ślizgowe suche i tarcie toczone.

8.1. Tarcie ślizgowe suche.

Jest to siła oporu, jaka występuje między suchymi powierzchniami dwóch ciał ślizgających się po sobie. Powierzchnie ciał nie są rozdzielone jakkolwiek warstwą smarującą, np. oleju, wody, itp. Tarcie to występuje np. w suchych sprzęgłach ciernych, hamulcach ciernych, między suchymi powierzchniami znitowanych blach, między suchą nawierzchnią drogi a oponą samochodową. Zjawisko tego tarcia opisują prawa Coulomba-Morena.



Prawa Coulomba-Morena:

1. Siła tarcia ślizgowego suchego nie zależy od wielkości powierzchni trących się ciał lecz od rodzaju tych powierzchni, czyli od rodzaju materiału, chropowatości powierzchni, kierunku linii obróbkowych, zapylenia.
2. Wartość siły tarcia spoczynkowego, w zależności od wielkości zewnętrznej siły czynnej \vec{F} , zmienia się od zera do wartości maksymalnej T_{max} proporcjonalnej do wartości siły nacisku wzajemnego ciał \vec{N} ; współczynnikiem proporcjonalności jest współczynnik μ_s tarcia ślizgowego suchego spoczynkowego
 $0 < T \leq T_{max} = \mu_s N$
Zwrot siły tarcia spoczynkowego jest przeciwny do kierunku poślizgu jaki wystąpiłby, gdyby tego tarcia nie było.
3. Wartość siły tarcia ruchowego (kinetycznego) nie zależy od prędkości poślizgu wzajemnego ciał, jej zwrot jest przeciwny do kierunku poślizgu a wartość proporcjonalna do siły nacisku wzajemnego ciał \vec{N} ; współczynnikiem proporcjonalności jest współczynnik tarcia ruchowego μ_r

$$T_r = \mu_r N$$

Orientacyjne wartości współczynnika tarcia ślizgowego suchego



Skojarzenie	Współczynnik tarcia ruchowego μ_r	Współczynnik tarcia spoczynkowego μ_s
Stal - żeliwo	0.18	0.30
Stal - stal	0.1	0.17
Stal - mosiądz	0.15	0.19
Stal - grafit	0.08	0.12
Stal - teflon	0.04	0.09
Stal - szkło	0.08	0.19

Kąt tarcia φ jest to największy kąt, o jaki może odchylić się całkowita reakcja \vec{R} podłoża od kierunku normalnego do powierzchni, gdy tarcie jest maksymalnie rozwinięte czyli ma wartość T_{max}

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{T_{max}}{R_n} = \frac{\mu_s N}{N} = \mu_s$$

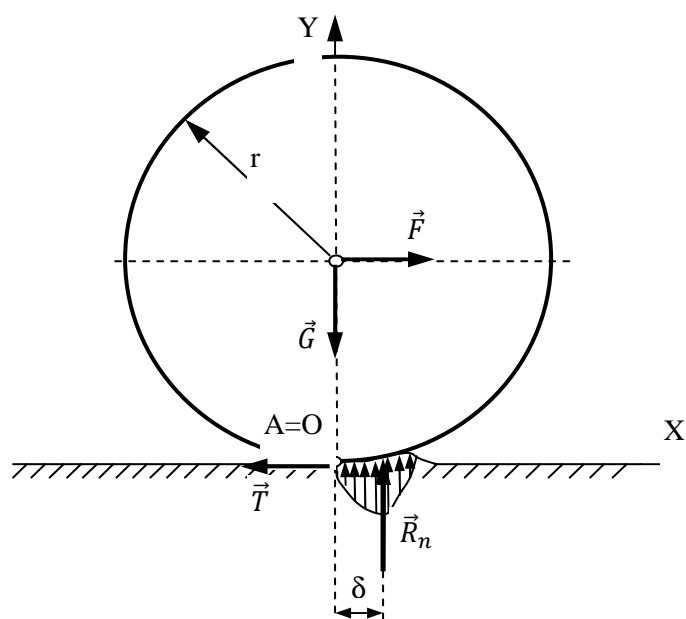
czyli

$$\varphi = \operatorname{arctg} \mu_s$$

Literatura: [2] rozdz. 2.7. str. 51÷59.

8.2. Tarcie toczne.

Rozważania niniejsze dotyczą elementów tocznych stosunkowo sztywnych, np. elementów łożysk tocznych: kulek, wałeczków, igiełek, stożków itp., kół jezdnych kolejowych, tramwajowych, wózków jezdnych suwnic, żurawi portowych itp., dla których tzw. promień toczny nie ulega istotnej zmianie. Rozważania nie dotyczą więc np. gumowych kół jezdnych samochodowych, które ulegają istotnym odkształceniom.



Uzasadnienie powstawania oporu przy toczeniu wymaga przyjęcia odkształcalności np. podłoża.

Siła reakcji normalnej podłoża nie jest wówczas przyłożona w jednym punkcie A teoretycznego styku elementu tocznego z podłożem, lecz rozłożona na pewnej powierzchni.

Wypadkowa \vec{R}_n jest przesunięta z punktu teoretycznego styku z podłożem A o wielkość δ zwaną współczynnikiem tarcia tocznego.

Orientacyjne wartości współczynnika δ tarcia tocznego:



$\delta \approx 0.5$ mm dla elementów drewnianych

$\delta \approx 0.005 \div 0.01$ mm dla elementów stalowych utwardzanych powierzchniowo

Równania równowagi statycznej elementu tocznego:

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= F - T = 0 \\ \sum F_{iy} &= -G + R_n = 0 \\ \sum M_{iA} &= F \cdot r - R_n \cdot \delta = 0\end{aligned}$$

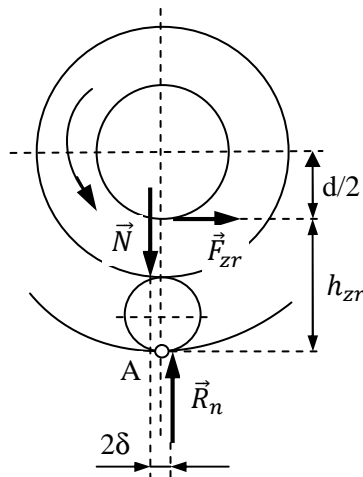
Z trzeciego równania wynikają wnioski konstrukcyjne:

$$F = \frac{\delta}{r} \cdot R_n = \frac{\delta}{r} \cdot G \quad [\text{N}]$$

„Aby siła czynna F niezbędna do toczenia elementu była jak najmniejsza, promień elementu r musi być jak największy, a współczynnik tarcia tocznego δ jak najmniejszy”.

Tarcie w łożyskach tocznych.

Rozważania niniejsze są oczywiście ogromnym uproszczeniem rzeczywistego zjawiska tarcia występującego w łożyskach tocznych.



Opory tarcia w łożysku redukuje się do średnicy czopa łożyska.

Równanie równowagi momentów sił działających w łożysku

$$\sum M_{iA} = F_{zr} \cdot h_{zr} - R_n \cdot 2\delta = 0$$

a stąd wartość zredukowanej siły tarcia

$$F_{zr} = \frac{2\delta}{h_{zr}} R_n = \frac{2\delta}{h_{zr}} \cdot N \quad [\text{N}]$$

oraz moment sił tarcia w łożysku

$$M_t = F_{zr} \cdot \frac{d}{2} = \frac{2\delta}{h_{zr}} \cdot N \cdot \frac{d}{2} = \mu_r \cdot N \cdot \frac{d}{2} \quad [\text{Nm}]$$

gdzie $\mu_r = 2\delta/h_{zr}$ jest współczynnikiem tarcia ruchowego łożyska.



Wartości współczynnika tarcia ruchowego łożysk tocznych

Typ łożyska	Współczynnik tarcia ruchowego μ_r
Kulkowe zwykłe przy obciążeniu promieniowym	0.002
Kulkowe zwykłe przy obciążeniu osiowym	0.004
Kulkowe wahliwe	0.0015
Igiełkowe	0.008
Stożkowe przy obciążeniu promieniowym	0.008
Stożkowe przy obciążeniu osiowym	0.020

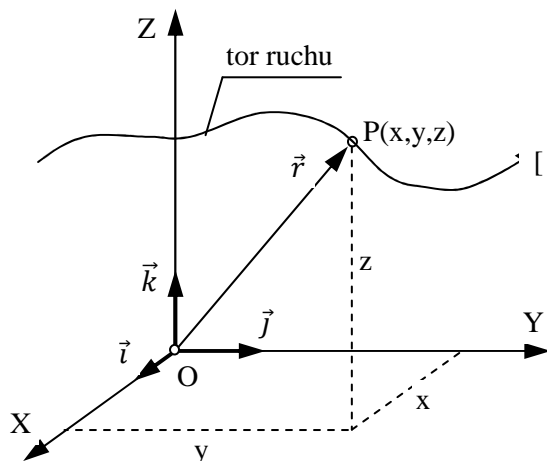
Literatura: [2] rozdz. 4.6. str. 98÷101.

Temat 9: Kinematyka punktu materialnego

9.1. Równania ruchu i toru ruchu punktu materialnego.

Ruch punktu materialnego to zmiana położenia punktu względem innego ciała, uważanego za ciało odniesienia. Obowiązuje oczywiście zasada względności ruchu. Z ciałem odniesienia wiąże się układ współrzędnych, względem którego określa się położenie punktu materialnego.

Współrzędne kartezjańskie.



Równanie wektorowe ruchu punktu

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$$

jest równoważne trzem równaniom parametrycznym skalarowym opisującym współrzędne kartezjańskie jako funkcje czasu t

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t)$$

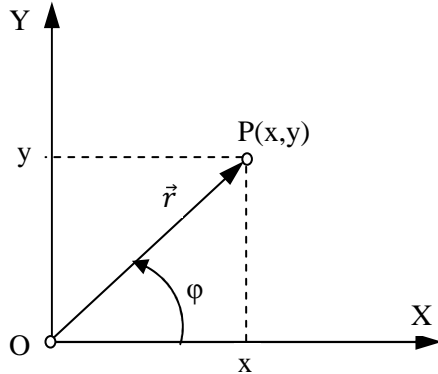
Jeżeli z powyższych równań można wyeliminować czas t , czyli istnieje funkcja

$$f(x, y, z) = 0$$

to jest ona równaniem toru ruchu punktu materialnego we współrzędnych kartezjańskich.



Współrzędne biegunowe na płaszczyźnie OXY



Jeżeli istnieją równania parametryczne ruchu we współrzędnych kartezjańskich

$$x = x(t); \quad y = y(t)$$

które związane są zależnościami ze współrzędnymi biegunowymi r, φ

$$x = r \cdot \cos \varphi; \quad y = r \cdot \sin \varphi$$

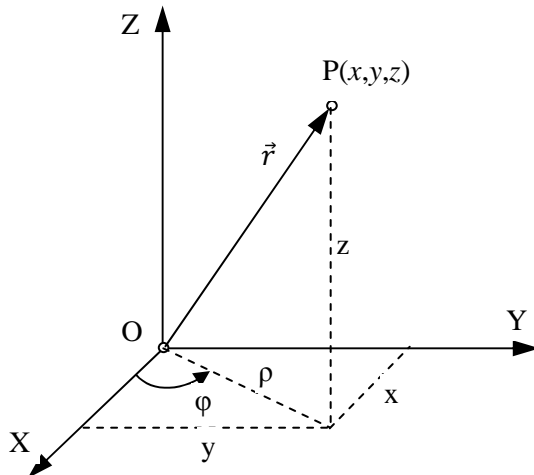
lub

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

to istnieją więc również równania ruchu we współrzędnych biegunowych

$$\varphi = \varphi(t); \quad r = r(t)$$

Współrzędne walcowe



Jeżeli istnieją równania parametryczne ruchu we współrzędnych kartezjańskich

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t)$$

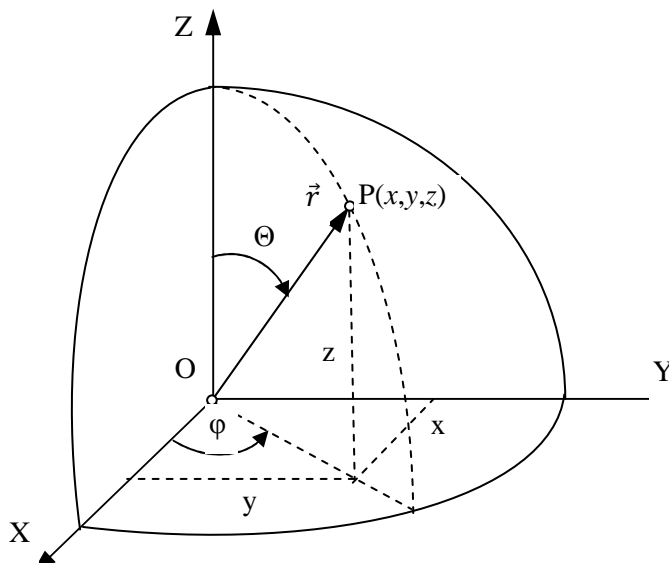
to ze względu na transformacje współrzędnych

$$\varphi = \arctg \left(\frac{y}{x} \right); \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad z = z$$

istnieją również równania ruchu we współrzędnych walcowych

$$\varphi = \varphi(t); \quad \rho = \rho(t); \quad z = z(t)$$

Współrzędne biegunowe w przestrzeni trójwymiarowej (sferyczne)



Jeżeli istnieją równania parametryczne ruchu we współrzędnych kartezjańskich

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t)$$

to ze względu na transformacje współrzędnych

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \varphi = \arctg \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

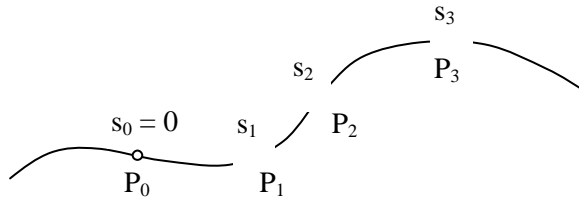
istnieją również równania we współrzędnych sferycznych

$$r = r(t); \quad \varphi = \varphi(t); \quad \theta = \theta(t)$$



Współrzędna łukowa

Założmy, że punkt materialny porusza się po pewnej krzywej, w ogólności w przestrzeni trójwymiarowej.



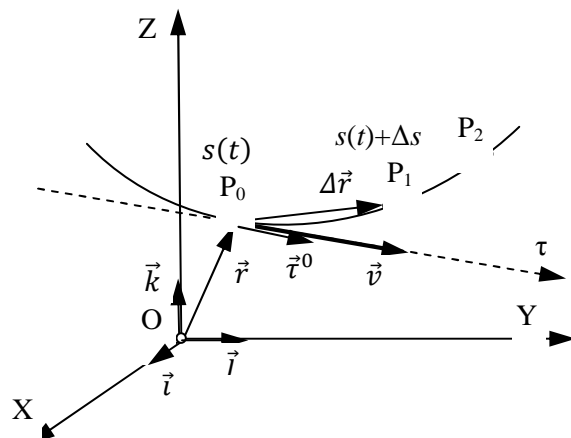
Jeżeli kolejnym punktom $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$ na torze ruchu punktu, odpowiadającym czasom $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots$, przyporządkuje się współrzędne tzw. łukowe $s_0 = 0; s_1, s_2, s_3, \dots$, które są równe długości drogi przebytej przez punkt materialny wzdłuż toru ruchu punktu od chwili początkowej, to oznacza że określono równanie ruchu punktu we współrzędnej łukowej

$$s = s(t)$$

Literatura: [2] rozdz. 10. str. 213÷222.

9.2. Prędkość punktu materialnego.

Prędkość \vec{v} punktu materialnego jest wektorem określającym szybkość zmiany jego położenia.



Przy $\Delta t \rightarrow dt \rightarrow 0$:

- kierunek siecznej P_0P_1 zmierza do kierunku stycznej τ
- współrzędna łukowa s zmieniła się o $\Delta s \rightarrow ds$ czyli wartość prędkości punktu

$$|\vec{v}| = v = \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| = \left| \frac{ds}{dt} \right| = |\dot{s}| \quad [\text{m/s}]$$

stąd wektor prędkości chwilowej punktu

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau}^0$$

Ponieważ

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

stąd

$$v = \left| \frac{ds}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \quad [\text{m/s}]$$

Wektor prędkości można przedstawić również za pomocą pochodnej geometrycznej promienia wodzącego \vec{r}



$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

a ponieważ $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$, stąd więc również

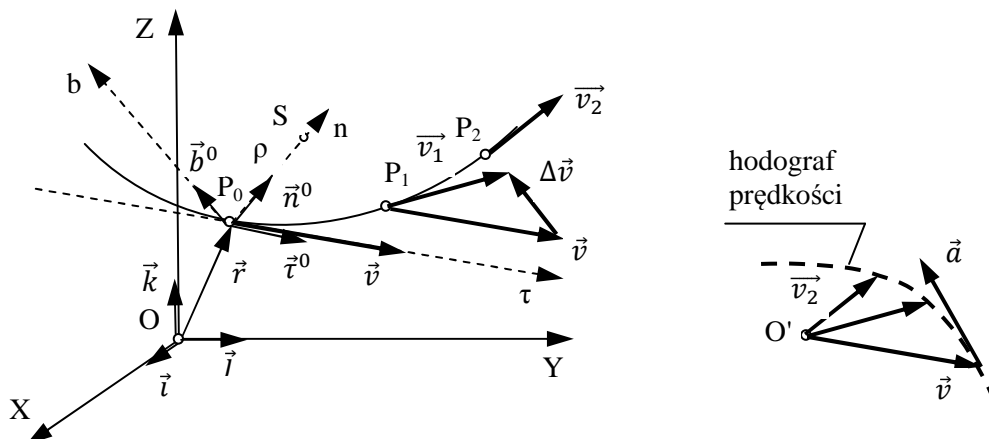
$$\vec{v} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k}$$

Na podstawie powyższego można sformułować twierdzenie:

„Prędkość jest wektorem stycznym do toru ruchu, zwrocie zgodnym z aktualnym kierunkiem ruchu i o wartości liczbowej równej wartości bezwzględnej pochodnej współrzędnej łukowej względem czasu”.

9.3. Przyspieszenie punktu materialnego.

Wektor przyspieszenia \vec{a} określa szybkość zmiany wektora prędkości \vec{v} punktu materialnego.



Wektor \vec{a} jest więc równy granicy ilorazu różnicowego przyrostu $\Delta \vec{v}$ i przyrostu czasu $\Delta t \rightarrow 0$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

czyli jest wektorem stycznym do hodografu prędkości tj. linii kreślonej przez koniec wektora prędkości zaczepionego w jednym punkcie np. O' .

Ponieważ $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ stąd wektor \vec{a} można rozłożyć na składowe na osiach układu OXYZ

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} + \ddot{z} \cdot \vec{k}$$

Wartość wektora przyspieszenia

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \quad [m/s^2]$$



Wprowadza się ruchomy układ współrzędnych naturalnych trzech osi wzajemnie prostopadłych: stycznej τ , normalnej n i binormalnej b z wersorami $\vec{\tau}^0, \vec{n}^0$ i \vec{b}^0 . Układ ten podczas ruchu punktu porusza się wraz z nim w ten sposób, że oś τ pozostaje niezmiennie styczna do toru ruchu punktu materialnego.

Można wykazać, że wektor przyspieszenia jest sumą geometryczną dwóch składowych: stycznej i normalnej

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \vec{\tau}^0 \right) = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau}^0 + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n}^0 = a_\tau \cdot \vec{\tau}^0 + a_n \cdot \vec{n}^0$$

gdzie:

ρ [m] – promień krzywizny toru ruchu punktu materialnego $\rho = P_0S$, S – środek krzywizny toru

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \quad [\text{m/s}^2] \quad \text{składowa styczna}$$

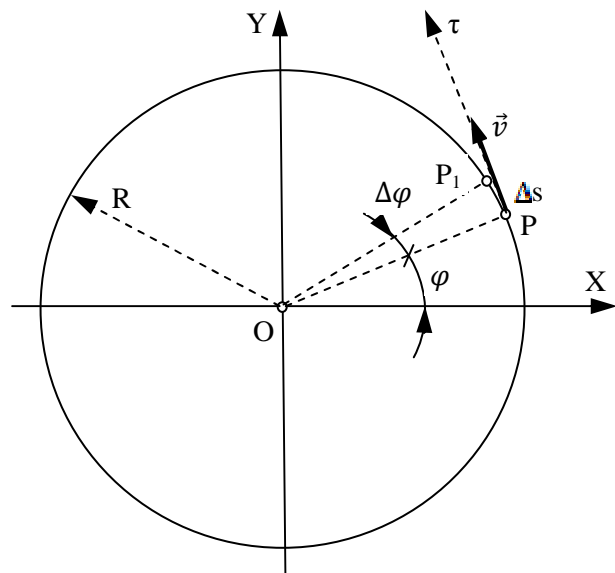
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \quad [\text{m/s}^2] \quad \text{składowa normalna}$$

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad [\text{m/s}^2] \quad \text{wartość przyspieszenia.}$$

Twierdzenie:

„Wektor przyspieszenia punktu \vec{a} jest sumą geometryczną składowej stycznej \vec{a}_τ , która odzwierciedla szybkość zmiany wartości prędkości punktu, oraz składowej normalnej \vec{a}_n , która odzwierciedla szybkość zmiany kierunku prędkości punktu”.

9.4. Kinematyka punktu w ruchu po okręgu.



Rozważa się ruch punktu materialnego po okręgu o promieniu R .

W czasie Δt punkt P przebędzie drogę kątową $\Delta\varphi$ oraz drogę liniową Δs .

Wektor prędkości \vec{v} ma więc wartość

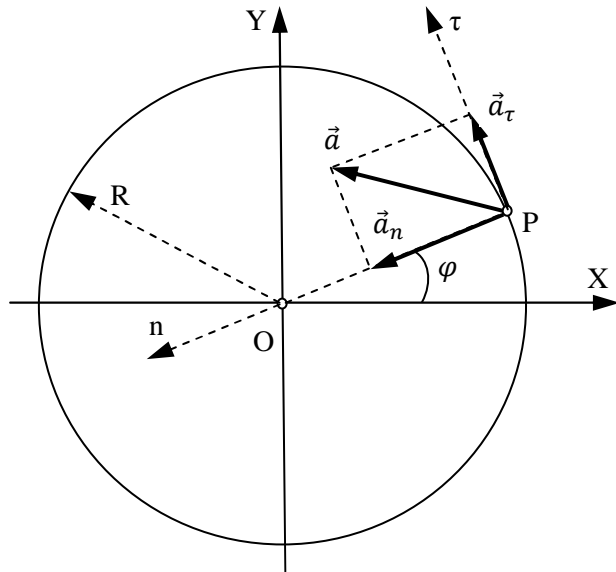
$$|\vec{v}| = v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \cdot \Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$= R \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R \cdot \frac{d\varphi}{dt} = R \cdot \omega \quad [\text{m/s}]$$

gdzie:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad [\text{rad/s}] \quad \text{prędkość kątowa}$$

punktu w ruchu po okręgu.



Wektor przyspieszenia punktu \vec{a} jest sumą geometryczną składowej stycznej \vec{a}_τ i składowej normalnej \vec{a}_n , przy czym

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R \cdot \omega)}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt} = R \cdot \varepsilon \quad [\text{m/s}^2]$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(R \cdot \omega)^2}{R} = R \cdot \omega^2 \quad [\text{m/s}^2]$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(R \cdot \varepsilon)^2 + (R \cdot \omega^2)^2} = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad [\text{m/s}^2]$$

gdzie:

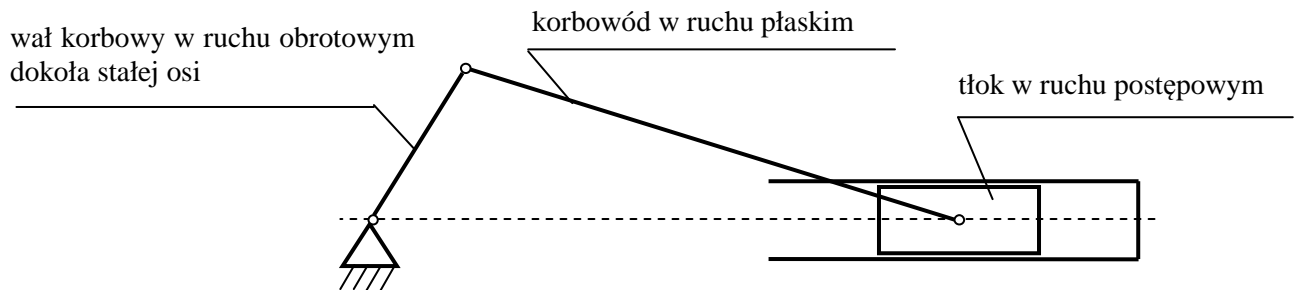
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} \quad [\text{rad/s}^2]$$

przyspieszenie kątowe punktu w ruchu po okręgu

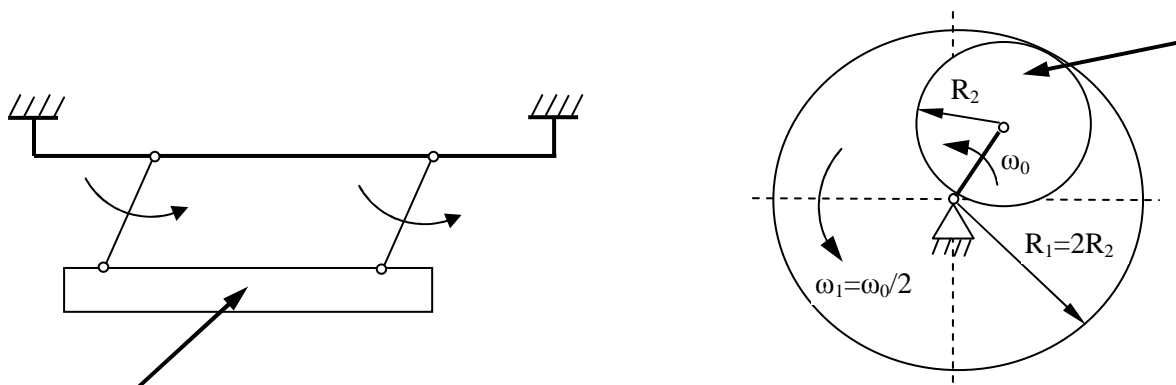
Literatura: [2] rozdz. 11. str. 223÷264.

Temat 10: Kinematyka ciała doskonale sztywnego; ruch postępowy i obrotowy dokoła stałej osi

Przykłady szczególnych przypadków ruchu ciała doskonale sztywnego.

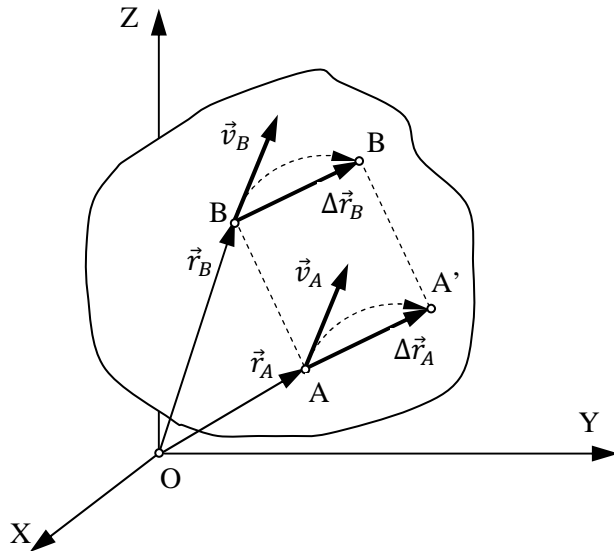


10.1. Ruch postępowy ciała doskonale sztywnego.





Inne przykłady ruchu postępowego



Z definicji ciała doskonale sztywnego wynika

$$AB = A'B'$$

oraz z definicji ruchu postępowego

$$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$$

stąd czworobok $ABB'A'$ jest równoległobokiem, czyli

$$\Delta \vec{r}_A = \Delta \vec{r}_B$$

oraz

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_B}{\Delta t}$$

a stąd

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B$$

Po ponownym zróżniczkowaniu otrzymuje się

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B$$

Z powyższego wynika twierdzenie:

„W ruchu postępowym ciała doskonale sztywnego prędkości dwóch dowolnych punktów ciała są w danej chwili takie same”.

Takie samo twierdzenie dotyczy przyspieszeń dwóch dowolnych punktów ciała.

Literatura: [2] rozdz. 12. str. 272÷281.



10.2. Ruch obrotowy ciała doskonale sztywnego dokoła stałej osi.

Wprowadza się pojęcie wektora prędkości kątowej ciała, który określa szybkość zmiany w czasie drogi kątowej $\Delta\varphi$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi \vec{k}}{\Delta t} = \vec{k} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{k} = \dot{\varphi} \vec{k}$$

oraz pojęcie wektora przyspieszenia kątowego ciała, który określa szybkość zmiany w czasie wektora prędkości kątowej

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega \vec{k}}{\Delta t} = \vec{k} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \\ &= \frac{d\omega}{dt} \vec{k} = \dot{\omega} \vec{k} = \dot{\dot{\varphi}} \vec{k} \end{aligned}$$

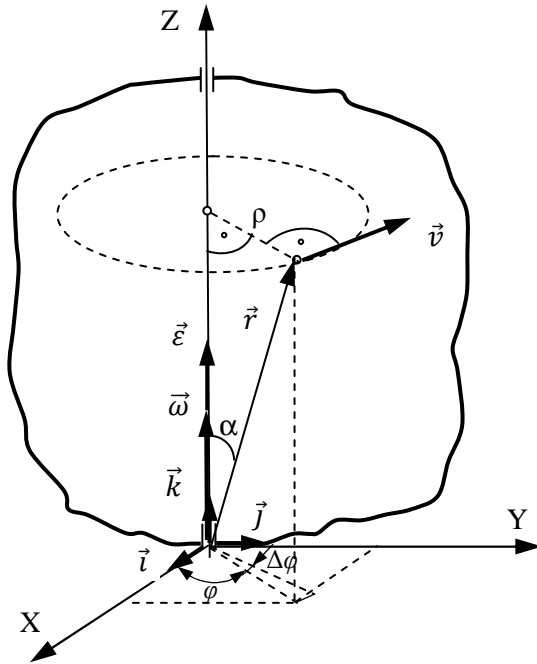
Oba wektory $\vec{\omega}$ i $\vec{\varepsilon}$ pozostają niezmiennie na osi obrotu ciała OZ.

Można udowodnić, że prędkość \vec{v} dowolnego punktu ciała można określić wyrażeniem

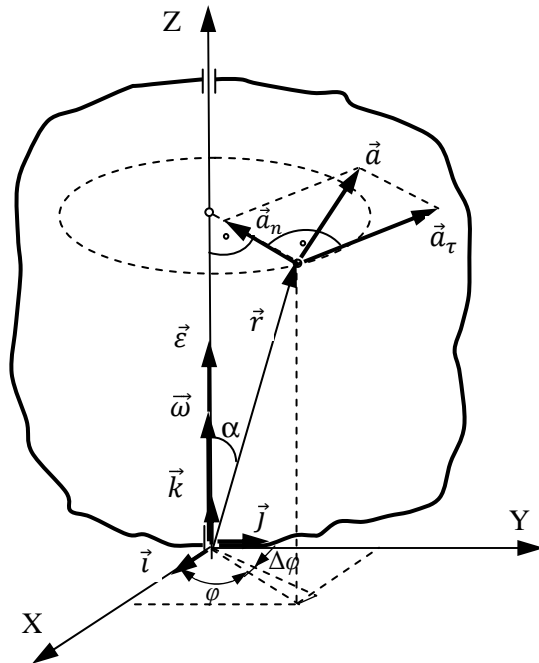
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

bowiem

- $\vec{v} \perp \vec{\omega}$ i $\vec{v} \perp \vec{r}$
- zwrot \vec{v} wynika z reguły śruby prawoskrętnej dla wektorów \vec{v} , $\vec{\omega}$ i \vec{r}
- wartość $v = \omega r \sin \alpha = \omega \rho$ [m/s].



Założmy, że ciało obraca się dokoła osi OZ. W czasie Δt ciało przebywa drogę kątową $\Delta\varphi$ [rad].



Można udowodnić ponadto, że przyspieszenie liniowe \vec{a} dowolnego punktu ciała można określić wyrażeniem

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

gdzie:

$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ przyspieszenie styczne

– $\vec{a}_\tau \perp \vec{\varepsilon}$ i $\vec{a}_\tau \perp \vec{r}$

– zwrot \vec{a}_τ wynika z reguły śruby prawoskrętnej dla wektorów $\vec{\varepsilon}$, \vec{r} i \vec{a}_τ

– wartość $a_\tau = \varepsilon \cdot r \cdot \sin\alpha = \varepsilon \cdot \rho$ [m/s²]

$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ przyspieszenie normalne

– $\vec{a}_n \perp \vec{\omega}$ i $\vec{a}_n \perp \vec{v}$

– zwrot \vec{a}_n wynika z reguły śruby prawoskrętnej dla wektorów $\vec{\omega}$, \vec{v} i \vec{a}_n

– wartość $a_n = \omega \cdot v \cdot \sin 90^\circ =$

$$= \omega \cdot (\omega \cdot r \cdot \sin\alpha) = \omega^2 \cdot \rho \quad [\text{m/s}^2].$$

Wartość całkowita przyspieszenia

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \rho \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad [\text{m/s}^2]$$

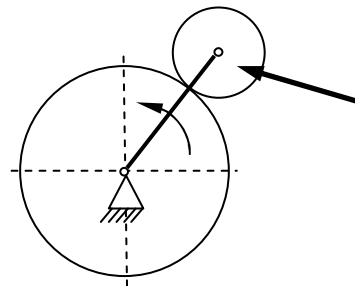
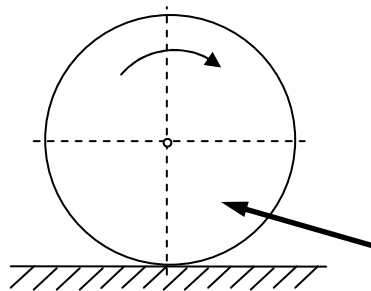
Literatura: [2] rozdz. 12.4. str. 281÷299.

Temat 11: Kinematyka ciała doskonale sztywnego w ruchu płaskim

Przykłady ruchu płaskiego ciała doskonale sztywnego.

Koło toczące się po prostoliniowym torze
w płaszczyźnie pionowej

Koło satelitarne obiegające koło
słoneczne (centralne)



Definicja:

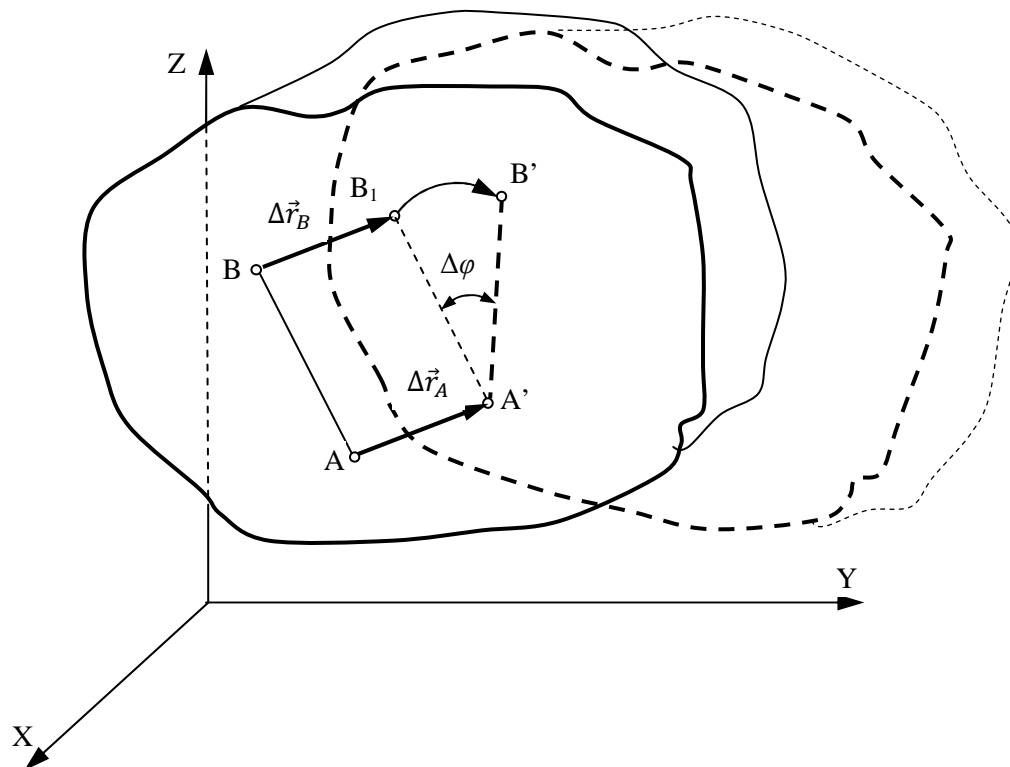
„W ruchu płaskim punkty ciała poruszają się w płaszczyznach niezmiennie równoległych do pewnej płaszczyzny zwanej płaszczyzną kierującą”.

Punkty ciała leżące na prostej prostopadłej do płaszczyzny kierującej kreślą identyczne tory ruchu. Ruch ciała może być więc opisany ruchem przekroju płaszczyzną związaną sztywno z ciałem, np. płaszczyzną kierującą. Załóżmy, że płaszczyzną kierującą jest płaszczyzna OXY.



11.1. Przemieszczenie ciała w ruchu płaskim

Położenie ciała może być opisane jednoznacznie położeniem dwóch różnych punktów ciała, np. A i B, wyznaczających odcinek \overline{AB} , leżący w przekroju ciała płaszczyzną kierującą. Dokonano przemieszczenia ciała w taki sposób, że odcinek \overline{AB} znalazł się w położeniu $\overline{A'B'}$.



Twierdzenie:

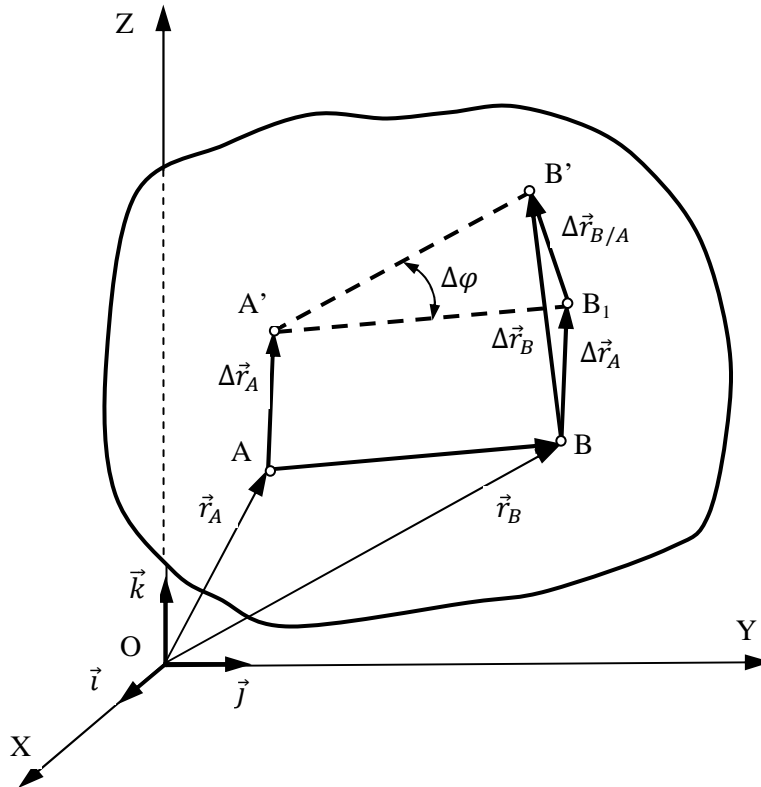
„Przemieszczenie ciała w ruchu płaskim można uważać jako złożenie przesunięcia równoległego o wektor translacji $\Delta\vec{r}_A$ dowolnego bieguna A oraz obrotu dookoła tego bieguna, przy czym kąt obrotu $\Delta\varphi$ nie zależy od wyboru tego bieguna”.

I twierdzenie Eulera:

„Przemieszczenie ciała w ruchu płaskim może być dokonane za pomocą obrotu wokół pewnego punktu zwanego środkiem obrotu”.

11.2. Prędkość kątowa ciała i prędkości liniowe jego punktów.

Rozważmy dwa położenia ciała określone położeniami odcinka \overline{AB} i $\overline{A'B'}$. Przemieszczenie punktu B można przedstawić za pomocą przyrostów promieni wodzących punktów A i B



$$\Delta \vec{r}_B = \Delta \vec{r}_A + \Delta \vec{r}_{B/A}$$

Rozważmy granice powyższych przyrostów

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_B}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_A}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_{B/A}}{\Delta t}$$

przy czym

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_{B/A}}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \varphi \vec{k}) \times \vec{r}_{AB}}{\Delta t} = \\ &= \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \cdot \vec{k} \right) \times \vec{r}_{AB} = (\omega \vec{k}) \times \vec{r}_{AB} \end{aligned}$$

stąd

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$

gdzie $\vec{\omega}$ jest prędkością kątową ciała w danej chwili.

Z powyższych rozważań wynika twierdzenie:

„Prędkość \vec{v}_B dowolnego punktu ciała B jest sumą geometryczną prędkości \vec{v}_A pewnego bieguna A i prędkości względnej $\vec{v}_{B/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$ tegoż punktu względem bieguna A, która jest prędkością punktu B w ruchu po okręgu o środku w biegunie A, z prędkością kątową ω ”.

Ponieważ kąt obrotu $\Delta \varphi$ nie zależy od wyboru bieguna, stąd twierdzenie:

„Prędkość kątowna ciała ω w ruchu płaskim nie zależy od wyboru bieguna, względem którego jest wyznaczana”.

Oznacza to, że prędkość kątowna ω ciała względem bieguna A jak i bieguna B, jest w danym momencie taka sama.

Szczególne przypadki ruchu płaskiego:

- ruch postępowy, gdy $\omega = 0$, gdyż wówczas $\vec{v}_B = \vec{v}_A$;
- ruch obrotowy dookoła osi przechodzącej przez punkt A, gdy $\vec{v}_A = 0$.

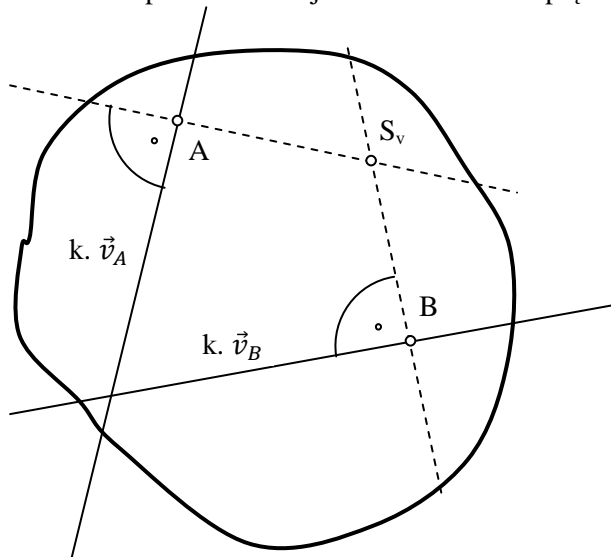
11.3. Chwilowy środek obrotu ciała. Centroida stała i ruchoma.

Punkt S_v , którego prędkość jest w danej chwili równa zero, jest punktem, wokół którego w danej chwili obraca się ciało. Punkt taki nazwano chwilowym środkiem obrotu lub środkiem prędkości.

Sposoby znajdowania chwilowego środka obrotu S_v :



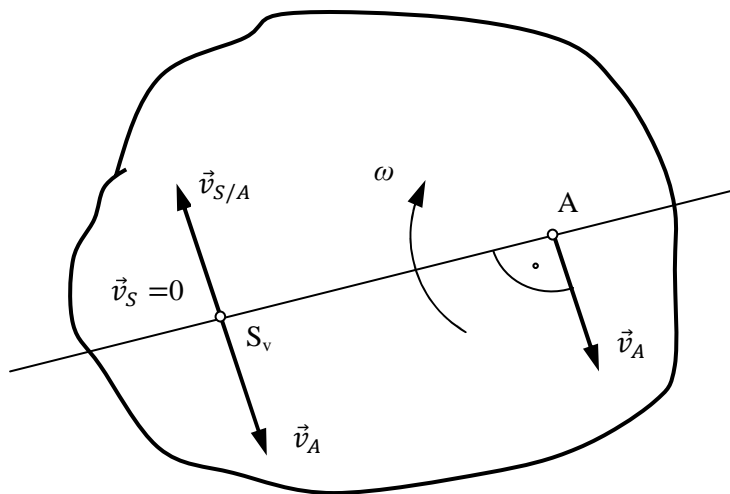
1. Na podstawie znajomości kierunków prędkości dwóch punktów ciała A i B



Kierunek prędkości \vec{v}_A punktu A musi być prostopadły do promienia S_vA okręgu po jakim w danej chwili wiruje punkt A. Podobnie jest z kierunkiem prędkości \vec{v}_B punktu B.

Chwilowy środek obrotu S_v musi więc leżeć na przecięciu się prostych prostopadłych do kierunków prędkości \vec{v}_A i \vec{v}_B w punktach A i B.

2. Na podstawie znajomości prędkości \vec{v}_A pewnego bieguna A i prędkości kątowej $\vec{\omega}$ ciała w danej chwili.



Prędkość punktu A określona jest równaniem

$$\vec{v}_A = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \overline{S_v A}$$

czyli

$$\begin{aligned} \vec{v}_S &= \vec{v}_A - \vec{\omega} \times \overline{S_v A} = \\ &= \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overline{AS_v} = 0 \end{aligned}$$

stąd

$$\vec{v}_A = -\vec{\omega} \times \overline{AS_v} = -\vec{v}_{S/A}$$

oraz ostatecznie

$$\vec{v}_{S/A} = -\vec{v}_A$$

i odległość AS_v jest równa

$$AS_v = \frac{v_{S/A}}{\omega} = \frac{v_A}{\omega}$$

Podczas płaskiego ruchu ciała chwilowy środek obrotu kreśli na płaszczyźnie kierującej krzywą zwaną **centroidą**. Centroida wykreślana w układzie nieruchomych osi nazywa się **centroidą stałą**, zaś w układzie osi ruchomych, związanych z ciałem – **centroidą ruchomą**. Ruch płaski można interpretować jako toczenie się bez poślizgu centroidy ruchomej po centroidzie stałej.



11.4. Przyspieszenie kątowe ciała i przyspieszenia liniowe jego punktów.

Przyspieszenie liniowe \vec{a}_B pewnego punktu B z definicji jest pochodną względem czasu jego prędkości \vec{v}_B

$$\vec{a}_B = \frac{d\vec{v}_B}{dt}$$

przy czym na podstawie poprzednich rozważań

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}$$

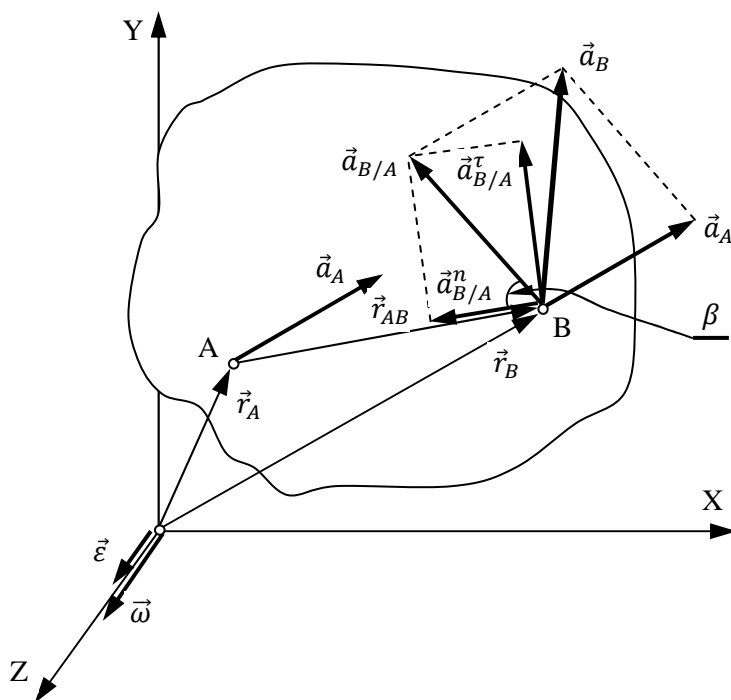
stąd

$$\vec{a}_B = \frac{d}{dt}(\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}) = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}) = \vec{a}_A + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}$$

gdzie:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon} \quad \text{przyspieszenie kątowe ciała}$$

$$\frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = \vec{v}_{B/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} \quad \text{prędkość względna punktu B względem punktu A.}$$



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{a_{B/A}^{\tau}}{a_{B/A}^n} = \frac{\varepsilon \cdot r_{AB}}{\omega^2 \cdot r_{AB}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

β – kąt nachylenia przyspieszenia względnego $\vec{a}_{B/A}$ względem prostej AB łączącej punkt B z biegunem A

Ostatecznie

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB}) = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}^{\tau} + \vec{a}_{B/A}^n = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

gdzie

$\vec{a}_{B/A}^{\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{AB}$ – przyspieszenie względne styczne punktu B względem punktu A

$\vec{a}_{B/A}^n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AB})$ – przyspieszenie względne normalne punktu B względem A

$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_{B/A}^{\tau} + \vec{a}_{B/A}^n$ – przyspieszenie względne punktu B względem punktu A



$$a_{B/A} = \sqrt{(a_{B/A}^{\tau})^2 + (a_{B/A}^n)^2} = \sqrt{(\varepsilon \cdot r_{AB})^2 + (\omega^2 \cdot r_{AB})^2} = r_{AB} \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad [m/s^2] \quad -$$

wartość przyspieszenia względnego

Twierdzenie:

„Przyspieszenie \vec{a}_B dowolnego punktu ciała B jest sumą geometryczną przyspieszenia \vec{a}_A pewnego bieguna A oraz przyspieszenia względnego $\vec{a}_{B/A}$ punktu B względem bieguna A, które z kolei jest sumą geometryczną przyspieszenia względnego stycznego $\vec{a}_{B/A}^{\tau}$ i przyspieszenia względnego normalnego $\vec{a}_{B/A}^n$ ”.

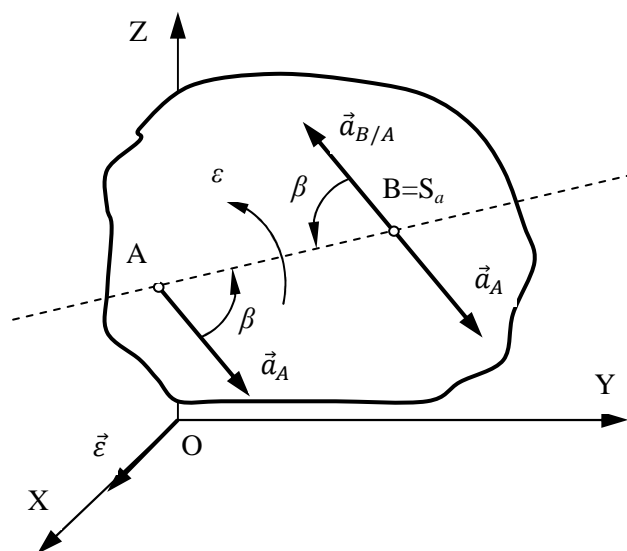
11.5. Środek przyspieszeń

Przyspieszenie dowolnego punktu B jest sumą geometryczną \vec{a}_A pewnego bieguna A i przyspieszenia względnego $\vec{a}_{B/A}$ punktu B względem punktu A. Jeżeli dla pewnego punktu B zachodziłby warunek

$$\vec{a}_{B/A} = -\vec{a}_A$$

to przyspieszenie całkowite punktu B byłoby równe 0. Punkt taki nazwano środkiem przyspieszenia S_a ciała w ruchu płaskim.

Jak znaleźć środek przyspieszenia ciała?



Założmy, że znane jest przyspieszenie \vec{a}_A pewnego bieguna A oraz prędkość kątową ciała ω i przyspieszenie kątowe ciała $\vec{\varepsilon}$. Przyspieszenie względne $\vec{a}_{B/A}$ jest odchyłone od prostej AB o kąt β wyznaczony równaniem

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

Należy więc od kierunku przyspieszenia \vec{a}_A pewnego bieguna A odmierzyć kąt β w kierunku wyznaczonym znakiem przyspieszenia $\vec{\varepsilon}$ i narysować prostą AS_a . Środek przyspieszeń S_a leży na tej prostej w odległości

$$AS_a = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

Gdy znane są kierunki przyspieszeń dwóch punktów ciała oraz prędkość kątowa ω i przyspieszenie kątowe ciała $\vec{\varepsilon}$, wyznaczamy kąt β i odkładamy dwie proste odchylone od przyspieszeń punktów o kąt β w kierunku wyznaczonym zwrotem przyspieszenia $\vec{\varepsilon}$. Punkt przecięcia tych prostych wyznacza środek przyspieszeń S_a .

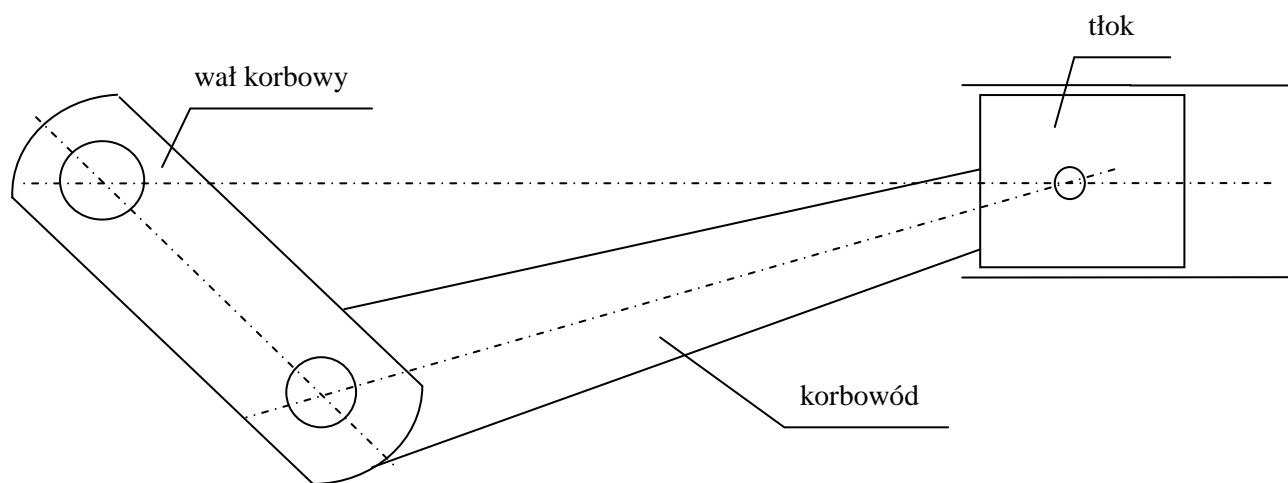
Literatura: [2] rozdz. 13. str. 300÷337.



Temat 12: Podstawowe pojęcia teorii mechanizmów i maszyn

Współczesne urządzenia techniczne np. statki, dźwigi, pojazdy lądowe i powietrzne, zbiorniki, słupy trakcji elektrycznej, mosty, roboty itp. to systemy złożone z ciał materialnych stałych, płynnych i gazowych. Wśród nich można wyróżnić urządzenia zmieniające swoją geometrię lub położenie, zwane **maszynami**. Składają się one najczęściej z wielu **mechanizmów**, spełniających określone zadania np. zamieniają ruch posuwisto-zwrotny tłoka na ruch obrotowy wału korbowego i dalej śruby okrętowej lub koła jezdnego pojazdu.

Elementy składowe mechanizmów, wykonujące ruchy względne, nazywa się **członami** lub **ogniwami**, np. w mechanizmie korbowo-tłokowym są nimi: tłok, korbowód, wał korbowy.

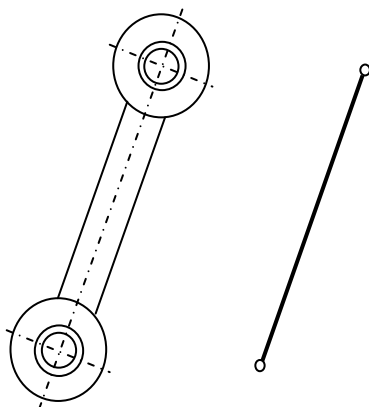


Człony (ogniwa) najczęściej są **elementami sztywnymi** (ich odkształcenia są pomijalnie małe) ale mogą być również **elementami odkształcalnymi** np. sprężyny zaworowe silników, sprężyny resorów samochodowych lub płyny zamknięte w cylindrach siłowników hydraulicznych: hamulców, robotów, koparek itp.

Człon układu, mechanizmu, najczęściej nieruchomy, względem którego określa się ruch pozostałych członów nazywa się **podstawą** lub **ostoją**. Dla mechanizmu korbowo-tłokowego jest to korpus silnika, głowica, cylinder.

Wśród członów ruchomych wyróżnia się **człony czynne**, do których jest przyłożony napęd układu i **człony bierne** tzn. te, które są napędzane. W mechanizmie korbowo-tłokowym członem czynnym jest tłok a biernym - wał korbowy. Korbowód można nazwać **członem pośredniczącym**.

Ze względu na rodzaj ruchu wykonywanego przez człony wyróżnia: **korby** wykonujące pełny ruch obrotowy, **wahacze** wykonujące ruch obrotowy nawrotny w granicach części kąta pełnego, **suwaki** wykonujące ruch postępowy itp.



Części członów przystosowane do połączenia z innymi członami nazywa się **półparami** lub **półwęzłami**. Wyróżnia się człony 2-, 3-, ... , n-węzłowe. Obok pokazano przykład członu dwuwęzłowego i jego schemat.



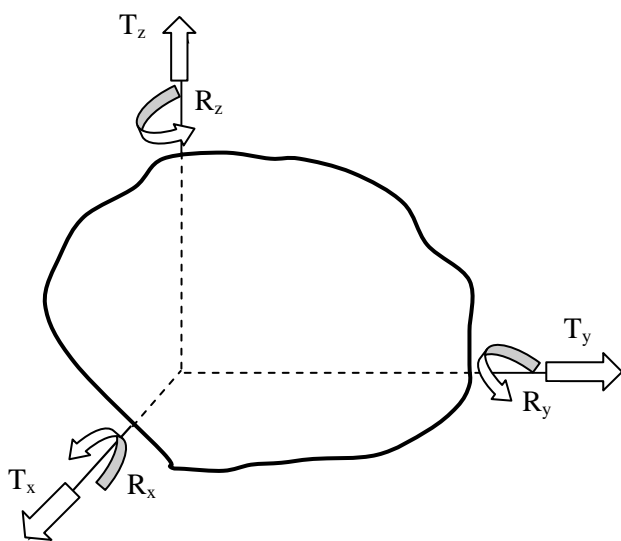
Liczbę półwęzłów członu oznacza się symbolem $N_2, N_3, N_4, \dots, N_n$ zaś liczbę takich członów w układzie, mechanizmie symbolem $n_2, n_3, n_4, \dots, n_n$.

Połączenie ruchowe członów, umożliwiające wzajemny ruch względny członów, nazywa się **parą kinematyczną** lub **węzłem kinematycznym**.

Pary kinematyczne dzieli się na **przestrzenne i płaskie**.

Typy członów	N_2	N_3	N_4	N_5
W układzie płaskim				
W układzie przestrzennym				

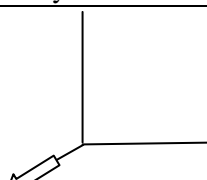
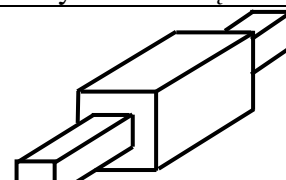
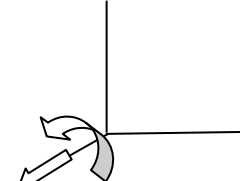
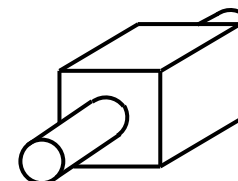
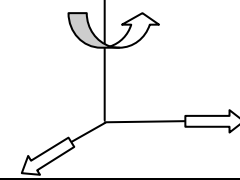
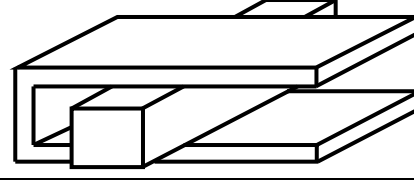
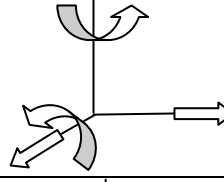
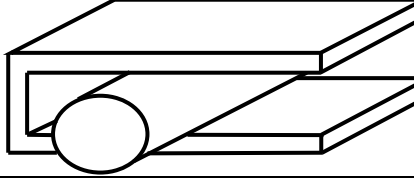
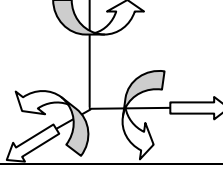
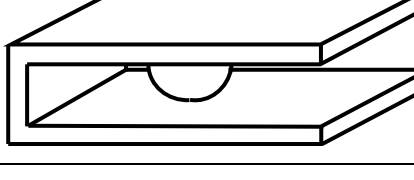
Pary kinematyczne dzieli się m.in. na **klasy według liczby stopni swobody jednego członu względem innego**. Stopnie swobody rozumie się w sposób omówiony w temacie 1.



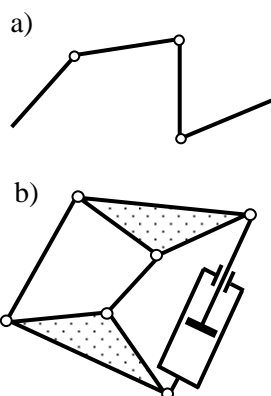
Swobodny człón ma więc sześć stopni swobody, rozumianych jako możliwość wykonywania trzech niezależnych translacji T_x, T_y, T_z i trzech niezależnych obrotów R_x, R_y, R_z względem trzech osi układu OXYZ.

Człony w parach kinematycznych nakładają na siebie ograniczenia czyli więzy, odbierając sobie wzajemnie pewną liczbę stopni swobody. Człony dysponują więc w parach kinematycznych mniejszą niż ciała swobodne liczbą stopni swobody. Wszystkie pary kinematyczne podzielono na tej podstawie na 5 klas oznaczonych cyframi rzymskimi: I, II, III, IV i V. Numer klasy oznacza liczbę stopni swobody jednego członu względem drugiego.



Klasa	Symbol	Przykład rozwiązania
I	T_x 	
II	$T_x R_x$ 	
III	$T_x T_y R_z$ 	
IV	$T_x T_y R_x$ 	
V	$T_x T_y R_x R_y$ 	

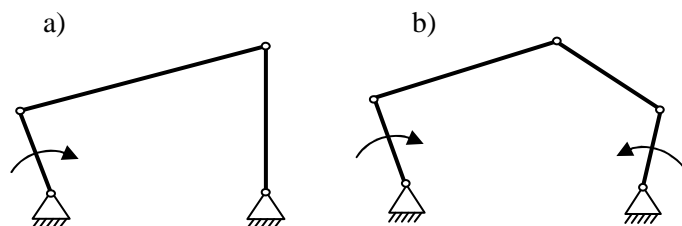
Łańcuchem kinematycznym nazywa się połączenie ruchowe kilku członów.



Łańcuch na rys a) jest **łańcuchem otwartym**, natomiast na rys. b) – **zamkniętym**.

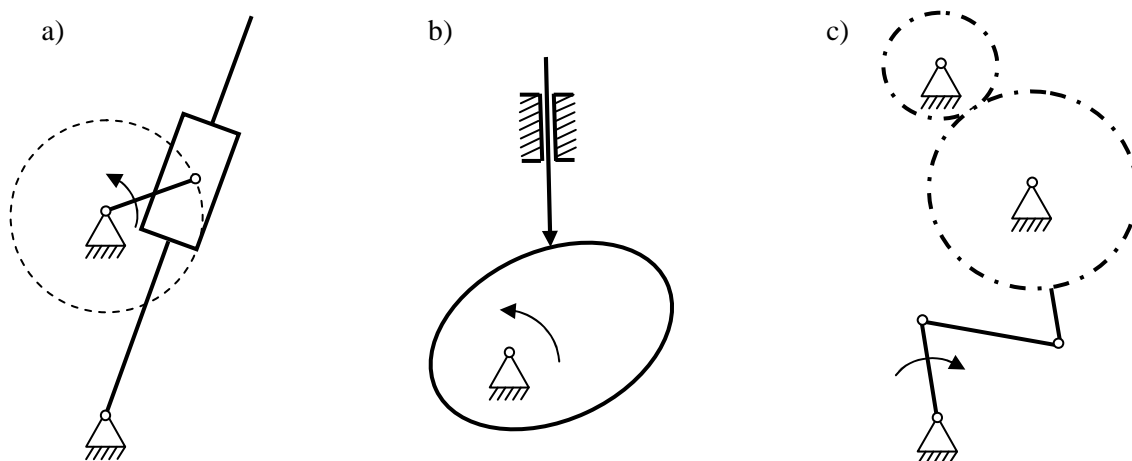
Łańcuch b) jest **łańcuchem jednobieżnym**, tzn. zadanemu ruchowi jednego członu odpowiadają ściśle określone ruchy pozostałych członów. Łańcuch a) jest natomiast **łańcuchem niejednobieżnym**.

Ruchliwością lub **stopniem ruchliwości** W układu nazywa się liczbę stopni swobody jakimi dysponują członki układu względem jednego z nich, lub inaczej, ruchliwość można określić liczbą ograniczeń ruchów (więzów), które nałożone na ruchome członki układu powodują, że układ staje się sztywny.



Mechanizmem określa się zamknięty łańcuch kinematyczny jednobieźny z jednym członem będącym podstawą i charakteryzujący się liczbą członów czynnych równą jego ruchliwości.

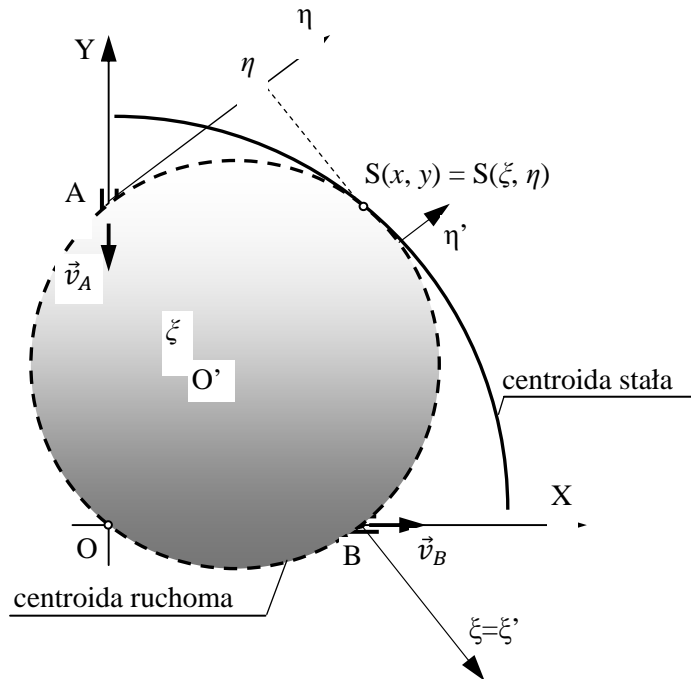
Poniżej na rysunku pokazano przykłady mechanizmów: a) mechanizm jarmowy; b) mechanizm krzywkowy; c) mechanizm zębaty z członem czynnym w postaci korby.



Literatura: [1], rozdz. 1. [4], rozdz. 1, str. 7÷34.

Temat 13: Analiza kinematyczna mechanizmów.

Większość zagadnień dotyczących analizy kinematycznej mechanizmów płaskich, takich jak określanie prędkości i przyspieszeń ciał oraz ich punktów, znajdowanie środka prędkości i przyspieszeń, została omówiona w temacie 12. Tutaj zostaną uzupełnione te rozważania o zagadnienie wyznaczania centroidy stałej i ruchomej. Rozważmy ruch sztywnego pręta AB o długości l , którego końce A i B ślizgają się po osiach OX i OY, w sposób pokazany na rysunku poniżej.



Chwilowy środek obrotu S pręta AB leży na przecięciu się prostych AS i BS prostopadłych do kierunków prędkości \vec{v}_A i \vec{v}_B czyli do kierunków osi OX i OY. Centroida stała jest więc opisana równaniem

$$x^2 + y^2 = l^2$$

czyli jest to okrąg o średnicy $l/2$ i o środku w punkcie O.

Ruchomy układ współrzędnych $O'\xi\eta$ związany jest z prętem, przy czym oś $O'\xi$ pozostaje niezmiennie na przecie AB.

Między współrzędnymi ξ, η oraz x, y istnieją następujące związki

$$\begin{aligned} x^2 &= \xi^2 + \eta^2 \\ y^2 &= \eta^2 + (l - \xi)^2 \end{aligned}$$

Po podstawieniu powyższych równań do równania centroidy stałej otrzymuje się równanie

$$2\xi^2 - 2l\xi + 2\eta^2 = 0$$

a po przesunięciu układu współrzędnych $O'\xi\eta$ wzdłuż osi $O'\xi$ o wektor $0.5l \vec{\xi}_0$, czyli przy zastosowaniu transformacji współrzędnych

$$\xi = \xi' + 0.5l \quad \eta = \eta'$$

otrzymuje się równanie

$$\xi'^2 + \eta'^2 = (l/2)^2$$

Centroidą ruchoma jest więc okrąg o środku w punkcie O' i o promieniu $l/2$. Ruch płaski pręta AB można więc przedstawić jako toczenie się bez poślizgu okręgu o promieniu $l/2$ wewnątrz okręgu o promieniu l .

Literatura: [1], rozdz. 1. [2] rozdz. 13. str. 300÷337. [4], rozdz. 1.

Temat 14: Podstawy dynamiki punktu materialnego.

Dynamika jest częścią mechaniki, poszukującą związków między przyczynami ruchu ciał, tj. siłami a ich skutkami, tj. parametrami opisującymi ruch: prędkością czy przyspieszeniem.

Rozważana tutaj klasyczna dynamika, opiera się na sześciu aksjomatach, w tym przede wszystkim na trzech prawach Newtona.

14.1. Aksjomaty dynamiki punktu materialnego

1. „Jeżeli na punkt materialny nie działa żadna siła lub działa układ sił równoważących się, to taki punkt porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym względem układu inercjalnego”.



2. „Przyspieszenie \vec{a} punktu materialnego względem układu inercjalnego jest proporcjonalne do siły \vec{F} działającej na punkt, a odwrotnie proporcjonalne do masy punktu m , będącej miarą jego bezwładności”

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{F}$$

3. „Dwa punkty materialne A i B oddziałują na siebie siłami \vec{F}_{AB} i \vec{F}_{BA} o tych samych kierunkach, przeciwnych zwrotach i tych samych wartościach liczbowych”

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

4. Prawo niezależności działania sił, tj. niezależności skutku działania danej siły od działania innej siły:

„Jeżeli na punkt materialny działają siły $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, z których każda z osobna działając na punkt materialny powoduje jego przyspieszenie równe $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$, to przyspieszenie punktu jest sumą geometryczną poszczególnych przyspieszeń \vec{a}_i ”

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i$$

5. Prawo powszechnego ciążenia:

„Dwa punkty o masach m_1 i m_2 przyciągają się siłami o tym samym kierunku, przeciwnych zwrotach i o wartościach jednakowych, proporcjonalnych do iloczynu mas punktów a odwrotnie proporcjonalnych do kwadratu odległości r między punktami

$$F = k \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad [\text{N}]$$

gdzie k jest pewnym współczynnikiem proporcjonalności zwanym stałą grawitacji.

6. Prawo względności mechaniki klasycznej:

„Każdy układ poruszający się ruchem jednostajnym prostoliniowym względem pewnego układu inercjalnego, jest też układem inercjalnym, bezwładnościowym”.

14.2. Równanie dynamiczne ruchu punktu materialnego

Na podstawie II prawa Newtona można napisać równanie różniczkowe wektorowe ruchu punktu materialnego

$$m\vec{a} = m\vec{r}'' = \vec{F} + \vec{R}$$

gdzie \vec{F} jest wypadkową sił czynnych działających na punkt materialny, natomiast \vec{R} jest siłą reakcji więzów, ograniczających ruch punktu.

Przyspieszenie \vec{a} oraz siły \vec{F} i \vec{R} można przedstawić za pomocą składowych w układzie kartezjańskim OXYZ

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k}$$

i stąd trzy równania dynamiczne skalarowe w układzie kartezjańskim

$$ma_x = F_x + R_x$$



$$ma_y = F_y + R_y$$

$$ma_z = F_z + R_z$$

Analogicznie można przedstawić przyspieszenie \vec{a} oraz siły \vec{F} i \vec{R} , za pomocą składowych w układzie współrzędnych naturalnych $O\tau$ i b osi stycznej $O\tau$, normalnej O_n i binormalnej O_b

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau}^0 + a_n \vec{n}^0$$

$$\vec{F} = F_\tau \vec{\tau}^0 + F_n \vec{n}^0 + F_b \vec{b}^0$$

$$\vec{R} = R_\tau \vec{\tau}^0 + R_n \vec{n}^0 + R_b \vec{b}^0$$

przy czym oczywiście przyspieszenie \vec{a} ma tylko dwie składowe: styczną \vec{a}_τ i normalną \vec{a}_n , stąd równania dynamiczne ruchu we współrzędnych naturalnych

$$ma_\tau = m \frac{d^2s}{dt^2} = m \frac{dv}{dt} = F_\tau + R_\tau$$

$$ma_n = m \frac{v^2}{\rho} = F_n + R_n$$

$$ma_b = 0 = F_b + R_b$$

gdzie, s jest drogą punktu materialnego, v jest wartością prędkości punktu materialnego a ρ jest promieniem krzywizny toru ruchu punktu materialnego.

Oczywiście w ruchu swobodnym punktu materialnego w powyższych równaniach znikają wszystkie składowe siły reakcji więzów \vec{R} , natomiast dla więzów idealnych, tj. bez tarcia, znika składowa styczna R_τ .

14.3. Zagadnienia dynamiki

- Zadane jest równanie parametryczne ruchu punktu materialnego $\vec{r} = \vec{r}(t)$ a wyznaczone są, poprzez różniczkowanie powyższego równania, siły działające na punkt materialny, w tym siły reakcji więzów.
- Zadane są siły czynne $\vec{F} = \vec{F}(t)$, a poszukiwane są, poprzez całkowanie, równanie parametryczne ruchu $\vec{r} = \vec{r}(t)$ oraz siły reakcji więzów.

Literatura: [3] rozdz. 1, str. 9÷12; rozdz. 2, str. 13÷31.

Spis literatury

- Felis J., Jaworowski H., Cieślak J.: Teoria maszyn i mechanizmów. Część I. Analiza mechanizmów. Wydawnictwa AGH, Kraków 2008.
- Leyko J.: Mechanika ogólna. T.1: Statyka i kinematyka. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
- Leyko J.: Mechanika ogólna. T.2: Dynamika. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
- Miller S.: Teoria maszyn i mechanizmów: analiza układów kinematycznych. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1996.
- Niezdziński T.: Mechanika ogólna. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.