



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Materiały dydaktyczne

Mechanika

Semestr I

Ćwiczenia



Przedmiot:		MECHANIKA									
Kierunek: Mechatronika											
Rozkład zajęć w czasie studiów – Studia pierwszego stopnia											
Semestr	Liczba tygodni w semestrze	Liczba godzin w tygodniu				Liczba godzin w semestrze					Punkty kredytowe
		A	C	L	S	Σ	A	C	L	S	
I	15	–	2	–	–	30	–	30	–	–	
Razem w czasie studiów						30	–	30	–	–	

Treść zajęć wykładowych i ćwiczeniowych w semestrze I

Nr tematu	Tematy i ich rozwinięcie	Razem	W	Ć
1	Podział, zadania i podstawowe pojęcia mechaniki ogólnej. Zasady statyki. Repetytorium z rachunku wektorowego.	4	2	2
2	Redukcja zbieżnego i równoległego układu sił. Para sił i jej własności, moment pary sił (moment obrotowy).	4	2	2
3	Redukcja płaskiego układu sił: wektor główny i moment główny układu sił; redukcja tylko do wypadkowej lub tylko do pary sił.	4	2	2
4	Warunki równowagi statycznej płaskiego układu sił.	2	1	1
5	Moment siły względem osi, warunki równowagi statycznej przestrzennego układu sił. Środek sił równoległych.	4	2	2
6	Środek ciężkości ciał jednorodnych liniowych, płaskich i przestrzennych.	4	2	2
7	Momenty statyczne, bezwładności i dewiacji punktów materialnych i ciał o skończonych wymiarach (momenty geometryczne i masowe).	4	2	2
8	Rodzaje tarcia. Tarcie ślizgowe suche spoczynkowe i kinetyczne. Tarcie toczne. Tarcie w łożyskach tocznych.	6	3	3
9	Kinematyka punktu materialnego: równania ruchu i tor ruchu, prędkość i przyspieszenie punktu. Kinematyka punktu w ruchu po okręgu. Ruch harmoniczny punktu materialnego.	6	3	3
10	Kinematyka ciała doskonale sztywnego; ruch postępowy i obrotowy.	4	2	2
11	Kinematyka ciała sztywnego w ruchu płaskim: prędkości i przyspieszenia ciała i jego punktów, chwilowy środek obrotu i środek przyspieszeń.	7	3	4
12	Podstawowe pojęcia teorii mechanizmów i maszyn (człon, para i łańcuch kinematyczny, ruchliwość, więzy)	2	2	–
13	Analiza kinematyczna mechanizmów (położenia i trajektorie, środek obrotu, prędkości i przyspieszenia członu i jego punktów). Mechanizmy dźwigniowe, krzywkowe, zębate.	5	2	3
14	Dynamika punktu materialnego: podstawowe pojęcia (w tym siła bezwładności), zadania i prawa dynamiki.	4	2	2
Razem		60	30	30



Temat 1. Powtórzenie rachunku wektorowego.

Zagadnienia:

- Wielkości skalarowe i wektorowe.
- Iloczyn skalarowy i wektorowy dwóch wektorów.
- Moment siły względem punktu.
- Twierdzenie Varignon'a.

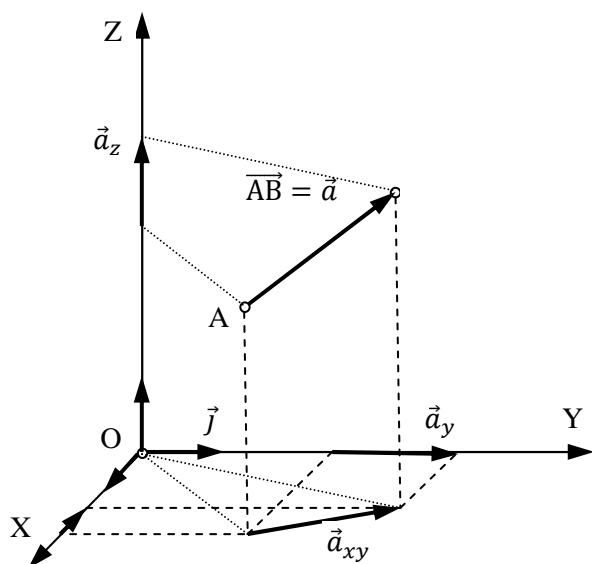
Wielkości skalarowe i wektorowe.

Wielkości fizyczne skalarowe to takie, dla określenia których należy podać wyłącznie ich wartość liczbową, np. masa, czas, temperatura, ciepło, długość, odległość itp.

Wielkości fizyczne wektorowe, inaczej skierowane, to takie, dla określenia których należy podać ich kierunek, zwrot, wartość liczbową i niekiedy punkt zaczepienia, w przypadku wektorów tzw. zaczepionych.

Wyróżnia się więc **wektory**:

- **swobodne**, które można równolegle przesuwać w przestrzeni, np. wektor momentu pary sił, wektor prędkości kątowej ciała w ruchu płaskim;
- **posuwne**, które można przesuwać jedynie wzdłuż ich ustalonej linii działania, np. wektor siły działającej na ciało doskonale sztywne, wektor prędkości kątowej i przyspieszenia kątowego ciała w ruchu obrotowym dokoła stałej osi;
- **zaczepione**, które są zaczepione w ściśle określonym punkcie przestrzeni, np. moment siły względem punktu, prędkość punktu materialnego.



Wektor w interpretacji geometrycznej przedstawia się parą uporządkowanych punktów, np. A i B, z których A jest początkiem wektora a B jest końcem wektora, i oznacza symbolem \overline{AB} lub \vec{a} .

Rzutuując wektor prostokątnie na osie układu OXYZ otrzymuje się wektory składowe $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ na osiach układu.

Wprowadza się tzw. wersory osi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, tzn. wektory jednostkowe o kierunku i zwrocie odpowiedniej osi układu.

Wektory składowe $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ można wówczas przedstawić w postaci

$$\vec{a}_x = a_x \vec{i}; \quad \vec{a}_y = a_y \vec{j}; \quad \vec{a}_z = a_z \vec{k}$$

gdzie a_x, a_y, a_z są składowymi wektora \vec{a} na osiach układu OXYZ.

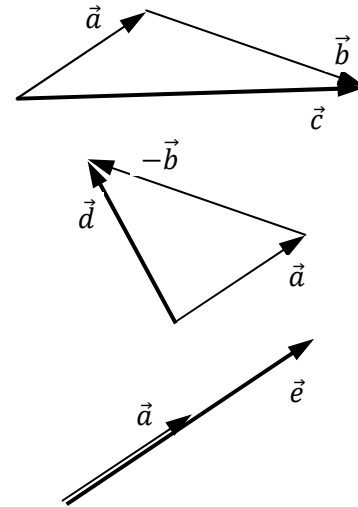
Wartość wektora \vec{a} można określić za pomocą składowych w następujący sposób

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$



Wektory podlegają m.in. następującym prawom:

- Dodawania wektorów: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$
- Odejmowania wektorów: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{d}$
- Mnożenia przez liczbę: $\vec{a} \cdot l = \vec{e}$



Iloczyn skalarowy i wektorowy dwóch wektorów

Def.

Iloczynem skalarowym dwóch wektorów \vec{a} i \vec{b} nazywa się skalar określony następująco

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

gdzie α jest miarą kąta zawartego między wektorami \vec{a} i \vec{b} .

Iloczyn skalarowy jest rozdzielny względem dodawania i jest przemienny, tzn. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

Iloczyny skalarowe wersorów osi są następujące

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

tzn. iloczyny skalarowe tych samych wersorów są równe 1, zaś różnych wersorów są równe 0.

Tw.

Łatwo wykazać, że iloczyn skalarowy dwóch wektorów

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

można przedstawić za pomocą składowych tych wektorów w następujący sposób

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Tw.

Warunkiem koniecznym prostokątności dwóch wektorów jest zerowanie się ich iloczynu skalarowego.

Def.

Iloczynem wektorowym dwóch wektorów \vec{a} i \vec{b} nazywa się wektor \vec{c}

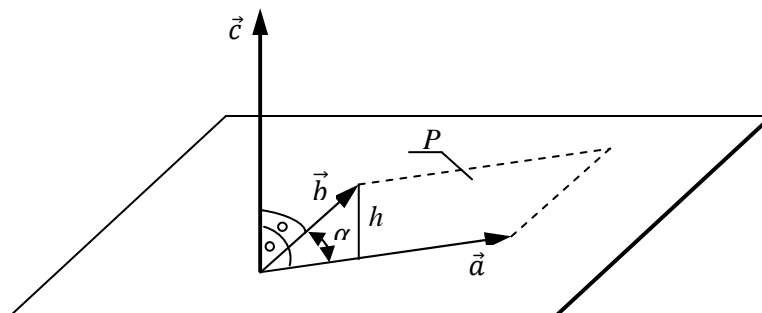
$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

o następujących własnościach:

- $\vec{c} \perp \vec{a}$ i $\vec{c} \perp \vec{b}$;

- zwrot \vec{c} wynika z reguły śruby prawoskrętnej (wyznacza go kierunek ruchu translacyjnego śruby prawej przy obracaniu tej śruby zgodnie z ruchem nakładania wektora \vec{a} na wektor \vec{b} po kącie mniejszym od półpełnego);

- wartość wektora \vec{c} jest równa: $|\vec{c}| = a \cdot b \cdot \sin \alpha = a \cdot h = P$, gdzie α jest miarą kąta zawartego między wektorami \vec{a} i \vec{b} , a P jest polem powierzchni równoległoboku zbudowanego na wektorach \vec{a} i \vec{b} .



Iloczyn wektorowy jest rozdzielny względem dodawania, ale nie jest przemienny, tzn.

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Iloczyny wektorowe wersorów osi

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} &= 0 \\ \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \end{aligned}$$

tzn. iloczyny wektorowe tych samych wersorów są równe 0, natomiast iloczyn dwóch kolejnych wersorów jest trzecim wersorem.

Tw.

Warunkiem koniecznym równoległości dwóch wektorów jest zerowanie się ich iloczynu wektorowego.

Moment siły względem punktu

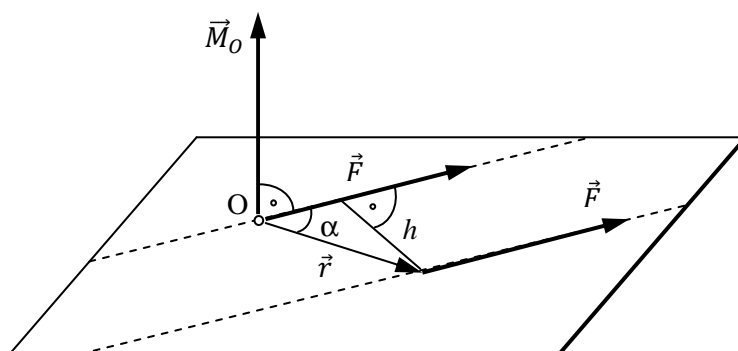
Def.

Momentem siły \vec{F} względem punktu O nazywa się wektor \vec{M}_O o następujących własnościach:

- \vec{M}_O jest prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez siłę \vec{F} i punkt O;
- zwrot wektora momentu \vec{M}_O wynika z reguły śruby prawoskrętnej (wyznacza go ruch translacyjny śruby prawej, przy jej obracaniu w kierunku wyznaczonym działaniem siły względem punktu O);
- wartość momentu \vec{M}_O określa wyrażenie

$$|\vec{M}_O| = M_O = |\vec{F}| \cdot h \cdot \sin \alpha = F \cdot h \cdot \sin \alpha \quad [\text{Nm}]$$

gdzie h jest ramieniem siły względem punktu O, a α jest miarą kąta między promieniem wodzącym siły \vec{r} a wektorem siły.



Można udowodnić twierdzenie:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

„Momentem siły względem punktu jest iloczyn wektorowy promienia wodzącego siły \vec{r} i wektora siły \vec{F} (lecz nie w odwrotnej kolejności)”.

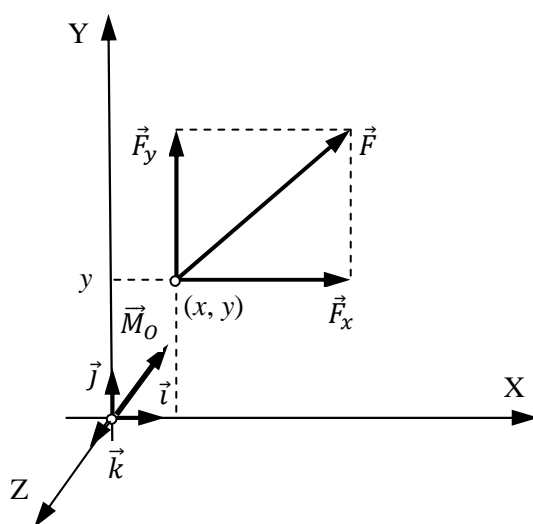


Twierdzenie Varignonona.

Twierdzenie:

„Moment sumy n sił zaczepionych w jednym punkcie jest równy sumie momentów tychże sił”.

Twierdzenie to zostanie zastosowane do dwóch sił, będących składowymi siły \vec{F} leżącej w płaszczyźnie OXY.



Moment siły \vec{F} względem punktu O jest równy sumie momentów sił składowych \vec{F}_x i \vec{F}_y względem punktu O

$$\begin{aligned}\vec{M}_O &= (-F_x \cdot y) \cdot \vec{k} + F_y \cdot x \cdot \vec{k} = \\ &= (F_y \cdot x - F_x \cdot y) \cdot \vec{k}\end{aligned}$$

gdzie:

$$\vec{F}_x = F_x \cdot \vec{i} \quad \vec{F}_y = F_y \cdot \vec{j}$$

x, y – współrzędne dowolnego punktu na linii działania siły \vec{F}

Moment \vec{M}_O leży na osi OZ (tutaj wchodzi za płaszczyznę rysunku).

Zadanie 1.1.

Dane są dwa wektory sił: \vec{AB} i \vec{AC} o współrzędnych punktów wyznaczających te wektory: A(-2,-3,3), B(1,2,5), C(2,3,5). Należy:

- Podać składowe wektorów \vec{AB} i \vec{AC} na osiach układu.
- Wyznaczyć składowe wektora wypadkowego tych sił.
- Wyznaczyć rzuty prostokątne wektorów tych sił na osie układu OXYZ.
- Znaleźć iloczyn skalarny wektorów \vec{AB} i \vec{AC} wyrażony ich składowymi.

Zadanie 1.2.

Dany jest wektor siły $\vec{AB} = (-3, 3, 2)$ o linii działania przechodzącej przez punkt C(1,1,0). Należy wyznaczyć moment siły \vec{AB} względem punktów O(0,0,0) i C(1,1,0).

Kiedy moment wektora względem punktu jest równy 0?

Jakimi wektorami są wektory momentów sił leżących w płaszczyźnie OXY, OXZ i OYZ względem punktów leżących w danej płaszczyźnie?

Literatura: [1], rozdz. 7, str. 30÷33. [2], rozdz.2.6; rozdz. 7.4 i 7.5. [4], rozdz. 1, str. 9÷14.

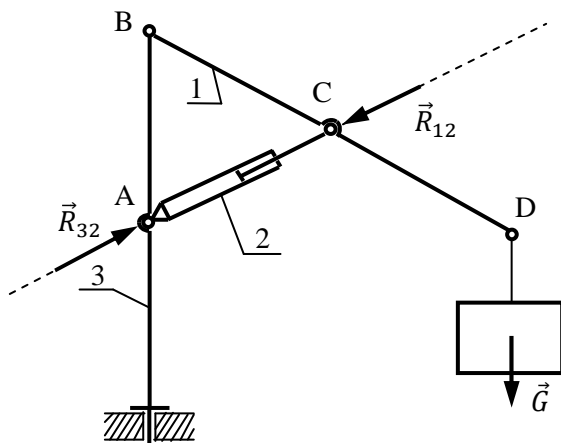
Temat 2. Redukcja zbieżnego i równoległego układu dwóch sił.

Zagadnienia:

- Wyznaczanie wypadkowej układu zbieżnego i równoległego dwóch sił
- Wyznaczanie sił reakcji podporowych.
- Wyznaczanie sił wewnętrznych w cięgnach i prętach.

Przykład 2.1.

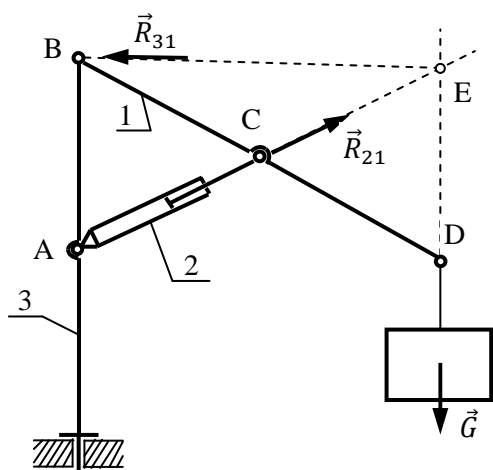
Ramię robota, pokazanego schematycznie na rysunku, unosi ładunek o ciężarze $G = 250 \text{ N}$. Dane: $AB = AC = 1 \text{ m}$; $BC = CD = 1.1 \text{ m}$. Należy wyznaczyć siłę F z jaką siłownik AC działa na ramię BD w położeniu pokazanym na poniższym schemacie i określonym powyższymi wymiarami.



Rozwiązanie:

Zakładamy, że ramię 1 i siłownik 2 są nieważkie (ciężar ich jest pomijalnie mały w stosunku do ciężaru G ładunku).

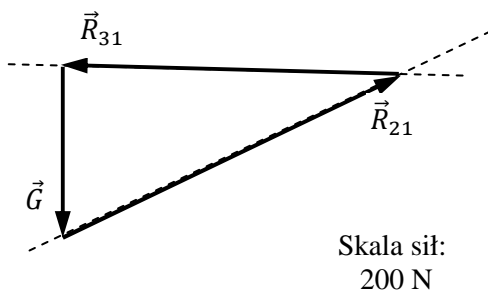
Na nieważkie siłownik działają tylko dwie siły: siła \vec{R}_{12} oddziaływania ramienia 1 i \vec{R}_{32} oddziaływania podstawy 3. Na podstawie drugiej zasady statyki wiemy, że dwie siły pozostają w równowadze, jeżeli mają przede wszystkim ten sam kierunek. Stąd wynika, że kierunek sił \vec{R}_{12} i \vec{R}_{32} jest kierunkiem prostej AC.



Z kolei z zasady akcji i reakcji wynika, że siła \vec{R}_{21} oddziaływania siłownika na ramię 1 jest wektorem przeciwnym do \vec{R}_{12} , czyli

$$\vec{R}_{21} = -\vec{R}_{12}$$

Kierunek siły ciężkości ładunku \vec{G} jest pionowy i przecina się w punkcie E z kierunkiem siły \vec{R}_{21} . Na ramię 1 działa jeszcze trzecia siła \vec{R}_{31} oddziaływania podstawy 3 w punkcie B. Z twierdzenia o równowadze trzech sił nierównoległych wynika, że siły te muszą być zbieżne, czyli kierunek siły \vec{R}_{31} musi przechodzić przez punkt E.



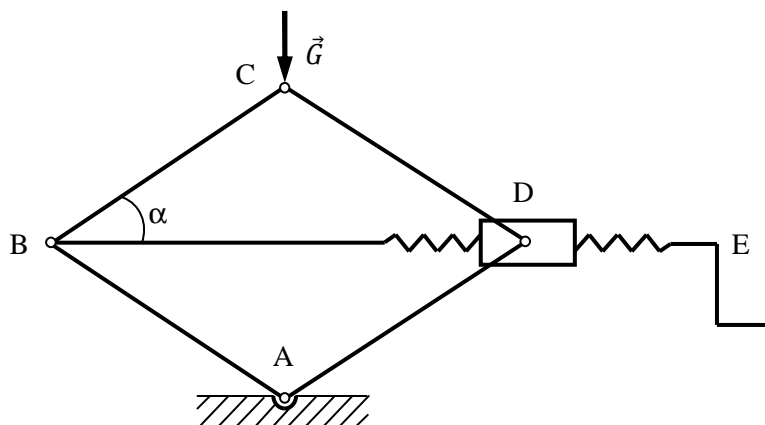
Warunkiem wystarczającym równowagi trzech sił nierównoległych jest zamykanie się wieloboku tych sił.

Rysujemy w pewnej skali wielobok sił: \vec{G} , \vec{R}_{31} i \vec{R}_{21} , przy czym dla siły \vec{G} znamy jej kierunek, zwrot i wartość. Z proporcji długości wektorów \vec{G} , \vec{R}_{31} i \vec{R}_{21} wyznaczamy wartości sił \vec{R}_{31} i \vec{R}_{21} . Zwroty tych sił wyznacza obieg w wieloboku sił zgodny ze zwrotem siły \vec{G} .



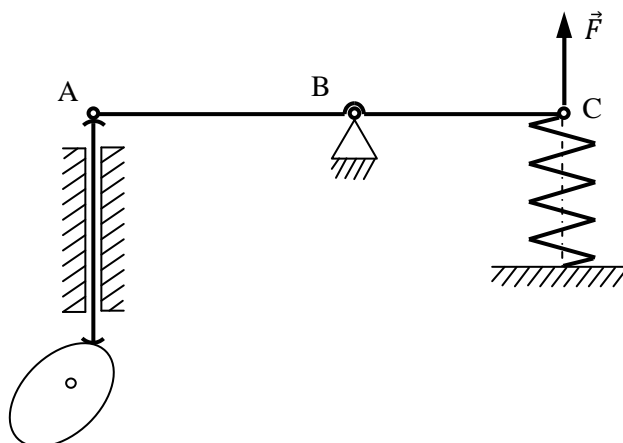
Zadanie 2.2.

Podnośnik śrubowy ABCDE ma cztery doskonale sztywne ramiona o długości $AB = BC = CD = DE = l = 0.3$ m., połączone przegubowo w sposób pokazany na schemacie. Podnośnik obciążony jest w przegubie C pionową siłą ciężkości pojazdu $G = 4000$ N. Należy wyznaczyć siły wewnętrzne w ramionach AB, BC, CD i DE, oraz w śrubie BE w położeniu podnośnika, przy którym miara kąta $\alpha = 30^\circ$. Zadanie rozwiązać wykreślnie i analitycznie.



Zadanie 2.3.

Pozioma dźwignia zaworowa ABC silnika spalinowego, traktowana jako doskonale sztywna belka, podparta jest przegubowo w punkcie B. W punkcie końcowym C na dźwignię działa pionowa siła sprężyny \vec{F} o wartości $F = 500$ N. Należy wyznaczyć sposobem wykreślnym i analitycznym pionowe siły \vec{F}_A i \vec{F}_B oddziaływania na dźwignię popychacza w punkcie A i przegubu w punkcie B. Dane: $AB = 1.5 \cdot BC = 0.3$ m.



Literatura: [4] rozdz. 2. str. 15÷33.



Temat 3. Redukcja płaskiego ogólnego układu sił.

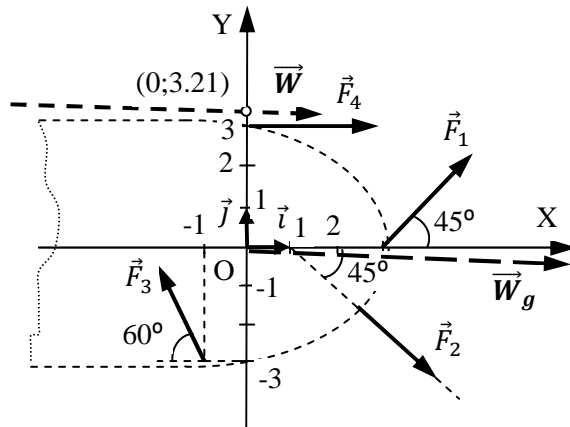
Zagadnienia:

- Wektor główny i moment główny płaskiego układu sił.
- Redukcja płaskiego układu tylko do wypadkowej; równanie linii działania wypadkowej.

Przykład 3.1.

Na płaski model kadłuba statku działa układ czterech sił: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ o wartościach liczbowych: $F_1 = 50$ N, $F_2 = 300$ N, $F_3 = 200$ N i $F_4 = 500$ N oraz o liniach działania pokazanych na schemacie. Należy wyznaczyć:

- wektor główny \vec{W}_g i moment główny \vec{M}_g podanego układu sił w punkcie O;
- wypadkową \vec{W} (jeżeli istnieje) podanego układu sił, tzn. jej linię działania, zwrot i wartość.



Rozwiązanie:

Ad. a) Wyznaczamy wektor główny w punkcie O

$$\vec{W}_g = W_{gx} \vec{i} + W_{gy} \vec{j}$$

gdzie:

$$W_{gx} = F_1 \cos 45^\circ + F_2 \cos 45^\circ - F_3 \cos 60^\circ + F_4 \cong 647.5 \text{ [N]}$$

$$W_{gy} = F_1 \sin 45^\circ - F_2 \sin 45^\circ + F_3 \sin 60^\circ \cong -3.57 \text{ [N]}$$

Wyznaczamy moment główny w punkcie O

$$\vec{M}_g = M_{gz} \vec{k} = \sum_{i=1}^4 M_{iO} \vec{k}$$

gdzie znak momentu jest dodatni, gdy działanie siły względem punktu O jest zgodne z kierunkiem nakładania pierwszej osi układu, tj. OX na oś drugą, tj. OY, po kącie mniejszym od półpełnego; w rozważany przypadku jest to kierunek w lewo, czyli

$$M_{gz} = F_1 \cdot \sin 45^\circ \cdot 3 - F_2 \cdot \sin 45^\circ \cdot 1 - F_3 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1 - F_3 \cdot \cos 60^\circ \cdot 3 - F_4 \cdot 3 = -2079.3 \text{ [Nm]}$$

Ad. b) Wyznaczamy wypadkową układu sił

Ponieważ wektor główny \vec{W}_g nie jest wektorem zerowym, więc podany układ sił można zredukować tylko do jednej siły wypadkowej \vec{W}

$$\vec{W} = W_x \vec{i} + W_y \vec{j}$$



gdzie:

$$W_x = W_{gx} = 647.5 \text{ [N]}, \quad W_y = W_{gy} = -3.57 \text{ [N]}$$

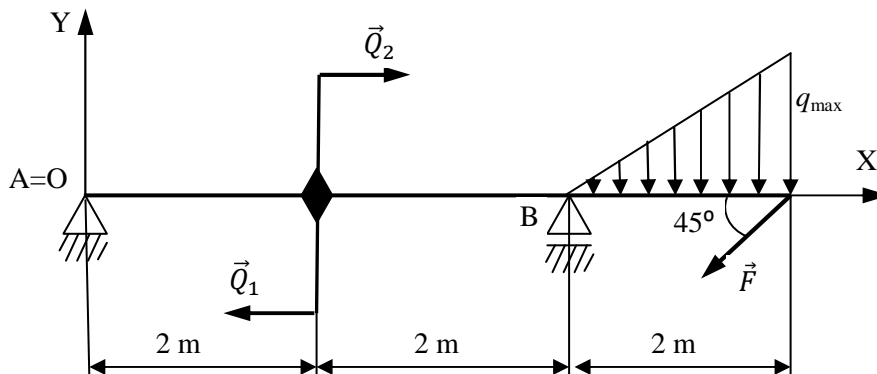
Linia działania wypadkowej \vec{W} określona jest następującym równaniem w postaci kierunkowej

$$y(x) = \frac{W_{gy}}{W_{gx}} x - \frac{M_{gz}}{W_{gx}} \cong -\frac{3.57}{647.5} x - \frac{-2079.3}{647.5} \cong -0.0055 x + 3.21$$

czyli wypadkowa \vec{W} będąc wektorem równoległym do wektora głównego \vec{W}_g i o tym samym zwrocie jak wektor główny przechodzi przez punkt (0; 3.21).

Zadanie 3.2.

Na belkę podpartą na podporze stałej A i podporze przesuwnej B działają w sposób pokazany na schemacie: siła skupiona \vec{F} o wartości $F = 100 \text{ kN}$, para sił \vec{Q}_1, \vec{Q}_2 o wartości $Q_1 = Q_2 = 50 \text{ kN}$ i o ramieniu 2 m oraz obciążenie ciągłe trójkątne o maksymalnym natężeniu $q_{\max} = 100 \text{ kN/m}$. Należy wyznaczyć w punkcie O wektor główny \vec{W}_g i moment główny \vec{M}_g oraz wypadkową \vec{W} podanego układu sił (jeżeli istnieje).



Literatura: [4] rozdz. 3. str. 43÷59.

Temat 4. Warunki równowagi statycznej płaskiego układu sił.

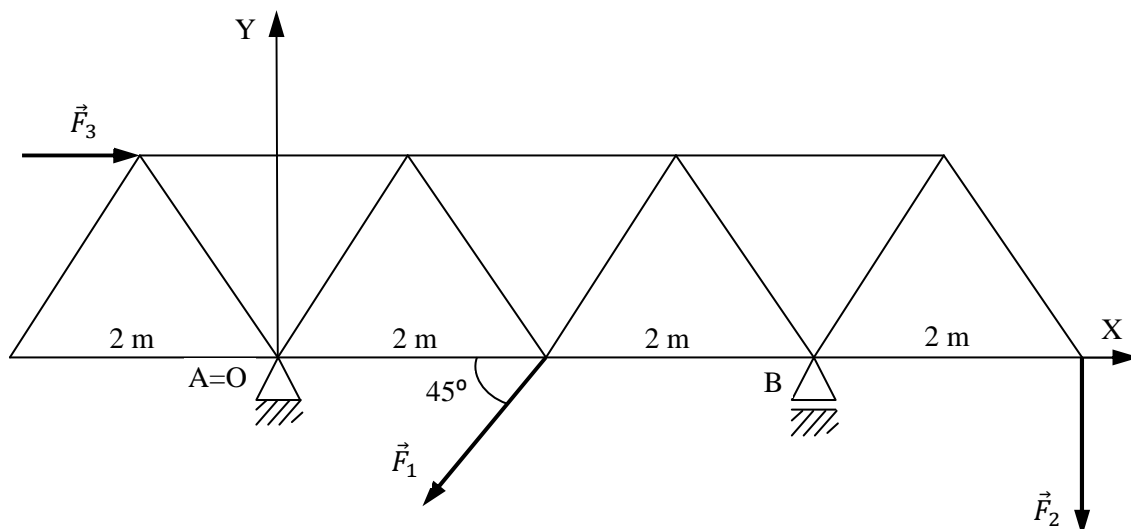
Zagadnienia:

- wyznaczanie sił reakcji podporowych;
- wyznaczanie sił wewnętrznych w prętach kratownic.

Przykład 4.1.

Kratownica dźwigara dachowego, pokazana schematycznie na rysunku poniżej, obciążona jest siłami skupionymi \vec{F}_1, \vec{F}_2 i \vec{F}_3 o wartościach liczbowych: $F_1 = 100 \text{ kN}$, $F_2 = 200 \text{ kN}$, $F_3 = 50 \text{ kN}$. Pręty kratownicy tworzą trójkąty równoboczne o boku 2 m . Należy wyznaczyć:

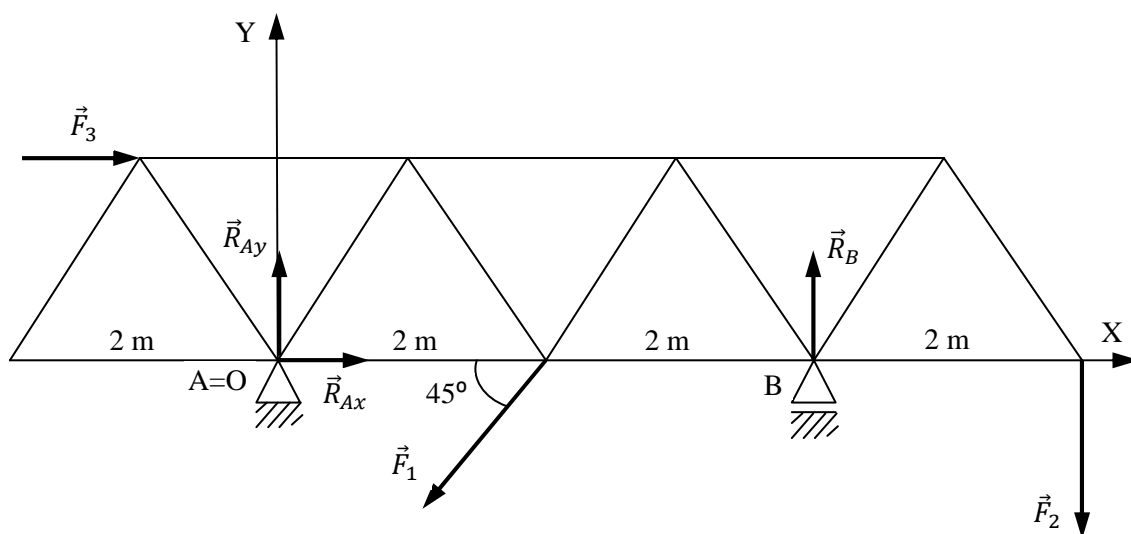
- siły reakcji w podporach A i B;
- siły wewnętrzne w prętach kratownicy metodą wydzielenia węzłów sposobem wykreślnym i analitycznym;
- siły wewnętrzne we wskazanych gwiazdką prętach kratownicy metodą przecięć Rittera.



Rozwiązanie:

Ad a) Wyznaczamy siły reakcji w podporach A i B.

Uwalniamy myślowo kratownicę od więzów i w ich miejsce wstawiamy siły reakcji podporowych. W nieprzesuwnej (stałej) podporze A są w ogólności dwie składowe siły reakcji: \vec{R}_{Ax} i \vec{R}_{Ay} , natomiast w przesuwnej podporze B jest tylko jedna (tutaj pionowa) składowa \vec{R}_B .



Piszemy równania równowagi statycznej wszystkich sił czynnych i sił reakcji podporowych działających na całą kratownicę; w równaniu momentów sił zakłada się, że moment działający w prawo jest dodatni

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= F_3 + R_{Ax} - F_1 \cos 45^\circ = 0 \\ \sum F_{iy} &= R_{Ay} - F_1 \sin 45^\circ + R_B - F_2 = 0 \\ \sum M_{iO} &= -F_3 \sqrt{3} - F_1 \sin 45^\circ \cdot 2 + R_B \cdot 4 - F_2 \cdot 6 = 0\end{aligned}$$

skąd otrzymuje się wartości sił reakcji podporowych:

$$R_{Ax} = F_1 \cos 45^\circ - F_3 = 50\sqrt{2} - 50 = 50(\sqrt{2} - 1) \cong 20.71 \text{ [kN]}$$

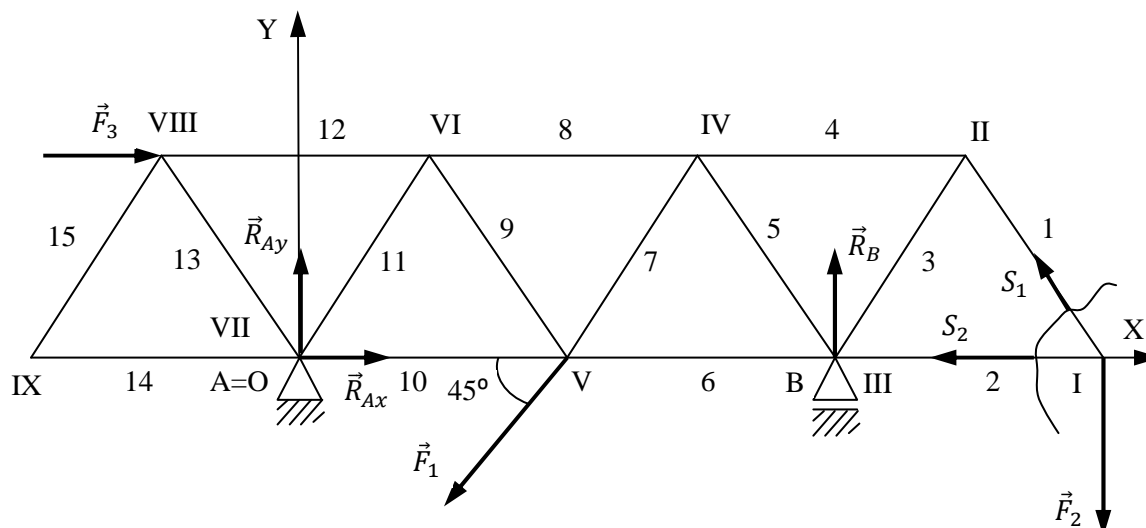


$$R_B = \frac{3}{2}F_2 + \frac{\sqrt{3}}{4}F_3 + \frac{\sqrt{2}}{4}F_1 \cong 357 \text{ [kN]}$$

$$R_{Ay} = F_1 \sin 45^\circ - R_B + F_2 \cong -86.3 \text{ [kN]}$$

Ad b) Wyznaczamy siły wewnętrzne w prętach metodą wydzielenia węzłów.

Oznaczamy węzły cyframi rzymskimi a pręty – cyframi arabskimi.



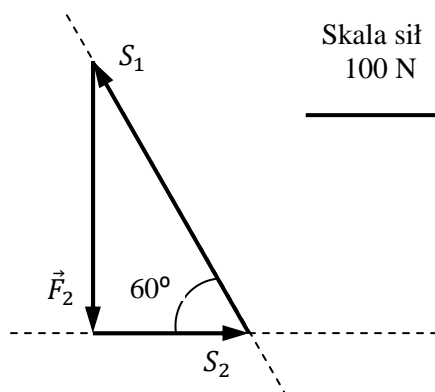
Sprawdzamy jeszcze **warunek konieczny statycznej rozwiązywalności kratownicy płaskiej:**

$$2 \cdot w = 2 \cdot 9 = 18 = p + 3 = 15 + 3 = 18$$

gdzie w jest liczbą węzłów : $w = 9$, a p jest liczbą prętów: $p = 15$. Warunek ten jest spełniony i wystarczający, aby kratownica była statycznie rozwiązywalna, gdyż każdy węzeł jest dołączony za pomocą tylko dwóch prętów.

Rozwiązywanie kratownicy rozpoczyna się od węzła, w którym zbiegają się co najwyżej dwa pręty o nieznanych siłach wewnętrznych. Tutaj można więc zacząć od węzła I. Wydzielamy myślowo węzeł z kratownicy, zastępując przecięte pręty siłami wewnętrznymi S_1 i S_2 . W sposobie graficznym budujemy zamknięty wielobok sił S_1 , S_2 i \vec{F}_2 , a w sposobie analitycznym piszemy równania równowagi sił działających na węzeł I.

Sposób graficzny



Sposób analityczny

$$\sum F_{ix} = -S_2 - S_1 \cos 60^\circ = 0$$

$$\sum F_{iy} = S_1 \sin 60^\circ - F_2 = 0$$

stąd siły w prętach

$$S_1 = \frac{F_2}{\sin 60^\circ} = \frac{200 \cdot 2}{\sqrt{3}} \cong 230.9 \text{ [kN]}$$

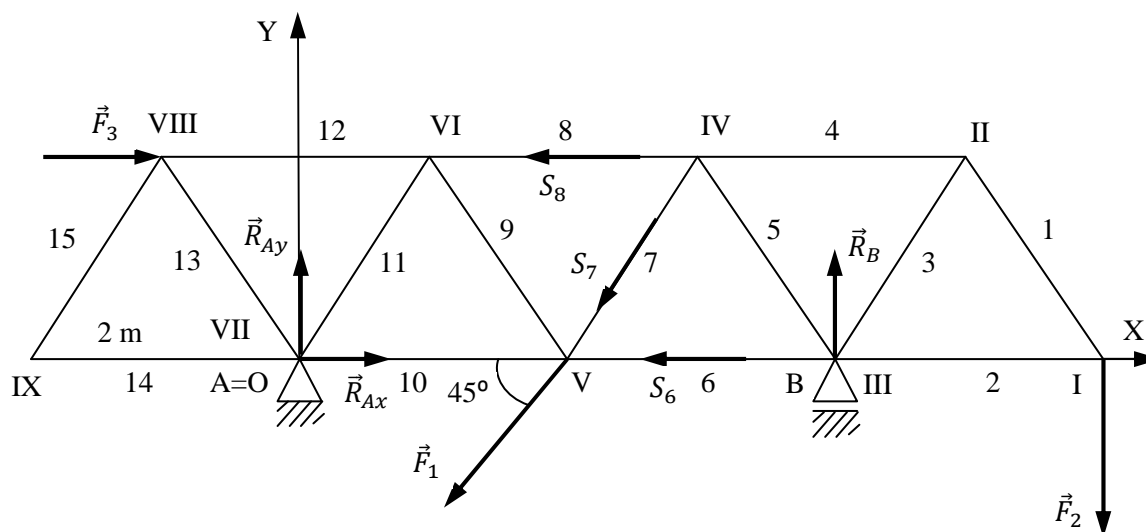
$$S_2 = -S_1 \cos 60^\circ = -\frac{200 \cdot 2}{\sqrt{3} \cdot 2} \cong -115.5 \text{ [kN]}$$



Pręt 1 jest prętem rozciągającym a pręt 2 – ściskającym. Rozwiązujemy teraz kolejny węzeł tj. II, wydzielając go myślowo z kratownicy, potem węzeł III, itd. Należy oczywiście przyjąć zwrot siły S_1 działającej na węzeł II, przeciwny do zwrotu tejże siły działającej na węzeł I. Stąd wyjątkowo nie zaznacza się symbolu wektora przy wektorach sił wewnętrznych w prętach kratownicy, budując wieloboki sił dla poszczególnych węzłów.

Ad. c) Wyznaczamy siły wewnętrzne w wybranych prętach kratownicy metodą Rittera.

Wyznaczając siły wewnętrzne w prętach kratownicy metodą wydzielania węzłów, należy rozpocząć rozwiązywanie od krańcowych węzłów. Metodą przecięć Rittera można w jednym kroku wyznaczyć siły w dowolnie wybranych prętach. Tutaj są to pręty 7 i 8.



Metoda ta przebiega w następujących etapach:

- Myślowo rozcina się w sposób zupełny kratownicę na dwie części. W zadaniu należy wyznaczyć siły wewnętrzne w dwóch tylko prętach, jednakże zupełność przecięcia kratownicy na dwie oddzielne części, zmusza do przecięcia trzech prętów kratownicy (sposób przecięcia pokazano na rysunku). Należy dodać, że liczba przeciętych prętów nie może być większa od trzech, gdyż dla dowolnego płaskiego układu sił można napisać co najwyżej trzy równania równowagi statycznej.
- Odrzuca się myślowo jedną z części kratownicy (tutaj wygodniej jest odrzucić lewą część, gdyż układ sił działających na część prawą jest prostszy) i w miejsce odrzuconych prętów przykłada się siły wewnętrzne S_6 , S_7 i S_8 w tych prętach. Zakłada się zwroty sił w prętach na zewnątrz przekroju, czyli zakłada się, że pręty są rozciągane.
- Formuluje się równania równowagi statycznej sił działających na tylko prawą część kratownicy

$$\begin{aligned} \sum M_{iIV} &= R_B \cdot 1 - F_2 \cdot 3 - S_6 \cdot \sqrt{3} = 0 \\ \sum M_{iV} &= S_8 \cdot \sqrt{3} + R_B \cdot 2 - F_2 \cdot 4 = 0 \\ \sum F_{iy} &= -S_7 \cdot \cos 30^\circ + R_B - F_2 = 0 \end{aligned}$$

i wyznacza na ich podstawie wartości sił w wybranych prętach kratownicy

$$S_6 = \frac{R_B - F_2 \cdot 3}{\sqrt{3}} \cong -140.3 \text{ [kN]}$$

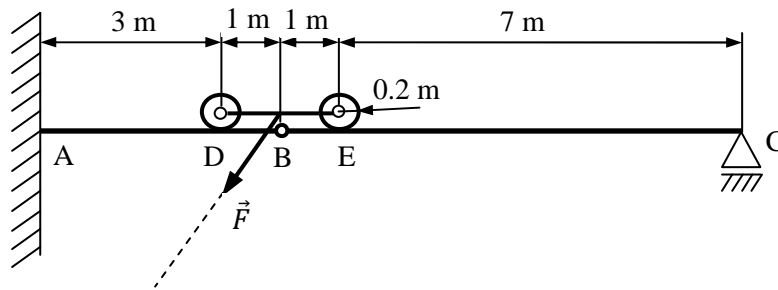


$$S_7 = \frac{R_B - F_2}{\cos 30^\circ} \cong 181.3 \text{ [kN]}$$
$$S_8 = \frac{F_2 \cdot 4 - R_B \cdot 2}{\sqrt{3}} \cong 49.7 \text{ [kN]}$$

Pręt 6 jest ściskany, natomiast pręty 7 i 8 są rozciągane.

Zadanie 4.2.

Doskonale sztywna belka ABC z przegubem w punkcie B jest utwierdzona w punkcie A i podparta na podporze przesuwnej w punkcie C. Na belce znajduje się wózek wciągarki, za pomocą której jest przyciągany ukośnie pod kątem 60° względem poziomu ładunek o ciężarze $F = 10000 \text{ N}$.



Należy wyznaczyć:

- Siły oddziaływania kół wózka wciągarki na belkę w punktach D i E
- Siły reakcji w podporach A i C
- Siły wzajemnego oddziaływania lewej i prawej części belki w przegubie B

Literatura: [2] rozdz. 6. str. 118÷133; [4] rozdz. 3. str. 43÷73; rozdz. 4. str. 96÷100.

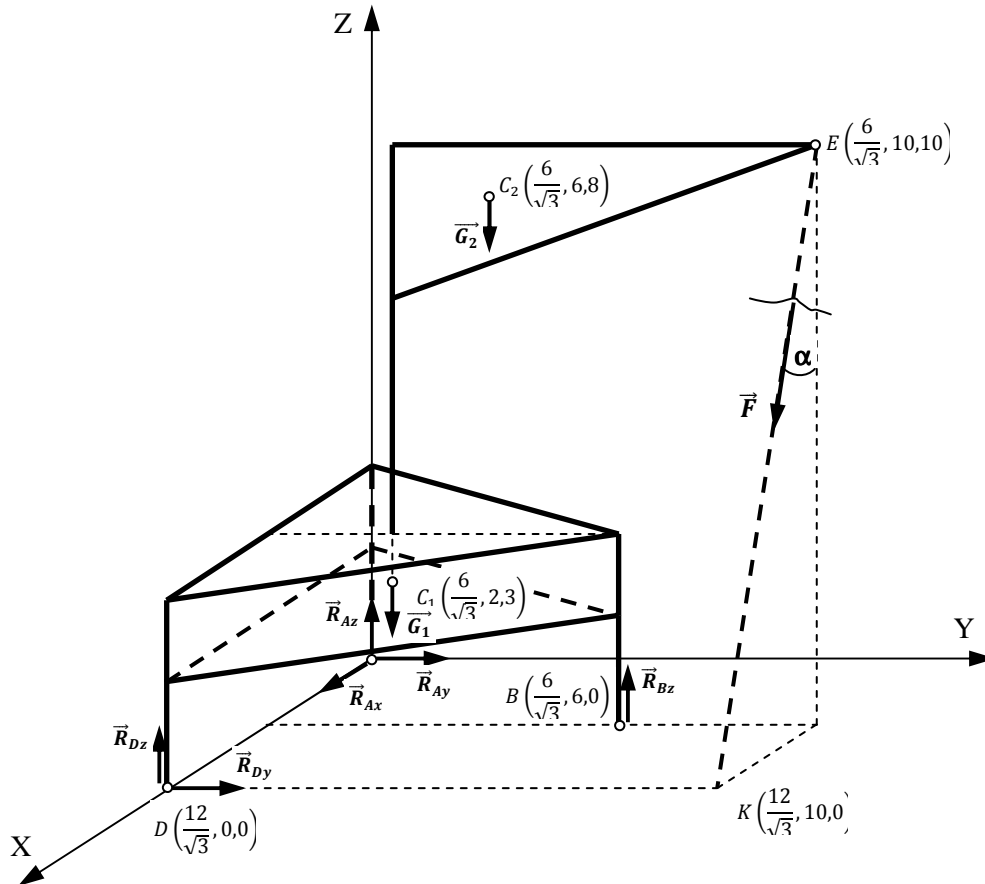
Temat 5. Wybrane zagadnienia przestrzennego układu sił.

Zagadnienia:

- moment siły względem osi;
- warunki równowagi statycznej przestrzennego układu sił.

Przykład 5.1.

Dźwig portowy wspiera się na trzech podporach ABD, z których A jest unieruchomiona w kierunkach trzech osi OX, OY i OZ, podpora D jest unieruchomiona w kierunkach osi OY i OZ, natomiast podpora B jest unieruchomiona tylko w kierunku osi OZ. Ciężar podstawy dźwigu w kształcie graniastosłupa o podstawie trójkąta równobocznego o boku $12/\sqrt{3} \text{ m}$ wynosi $G_1 = 15000 \text{ N}$. Ciężar wysięgnika wynosi $G_2 = 10000 \text{ N}$. Dźwig przyciąga za pomocą liny EK nachylonej do pionu pod kątem α ładunek siłą $F = 5000 \text{ N}$. Należy wyznaczyć siły reakcji w podporach A, D i B.



Rozwiązanie:

Z treści zadania wynika, że w podporze A umiejscowionej w punkcie O wystąpią trzy niewiadome składowe siły reakcji: \vec{R}_{Ax} , \vec{R}_{Ay} , \vec{R}_{Az} , w podporze D – dwie niewiadome składowe siły reakcji: \vec{R}_{Dy} , \vec{R}_{Dz} a w podporze B jedna niewiadoma składowa siły reakcji \vec{R}_{Bz} , czyli łącznie sześć niewiadomych.

Warunkiem równowagi przestrzennego układu sił jest zerowanie się sumy rzutów wszystkich sił czynnych na trzech osiach układu oraz zerowanie się sumy rzutów momentów wszystkich sił względem trzech osi układu. Stąd sześć równań równowagi statycznej układu z sześcioma niewiadomymi składowymi sił reakcji podporowych

$$\sum F_{ix} = R_{Ax} + F \sin \alpha = 0$$

$$\sum F_{iy} = R_{Ay} + R_{Dy} = 0$$

$$\sum F_{iz} = R_{Az} + R_{Dz} + R_B - G_1 - G_2 - F \cos \alpha = 0$$

$$\sum M_{ix} = R_B \cdot 6 - G_1 \cdot 2 - G_2 \cdot 6 - F \cdot \cos \alpha \cdot 10 = 0$$

$$\sum M_{iy} = -R_{Dz} \cdot 4 + G_1 \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} - R_B \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} + F \cdot \sin \alpha \cdot 10 + F \cdot \cos \alpha \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} = 0$$

$$\sum M_{iz} = R_{Dy} \cdot \frac{12}{\sqrt{3}} - F \cdot \sin \alpha \cdot 10 = 0$$

gdzie:



$$\sin \alpha = \frac{\frac{6}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2 + 10^2}} = \frac{6}{\sqrt{336}} \cong 0.327; \quad \cos \alpha = \frac{10}{\sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2 + 10^2}} = \frac{10}{\sqrt{112}} \cong 0.945$$

Z powyższych równań otrzymuje się składowe siły reakcji podporowych:

$$R_{Ax} = -F \sin \alpha \cong -1635 \quad [\text{N}]$$

$$R_{Dy} = F \cdot \sin \alpha \cdot \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{12} \cong 2359.9 \quad [\text{N}]$$

$$R_{Ay} = -R_{Dy} = -2359.9 \quad [\text{N}]$$

$$R_B = G_2 + \frac{1}{3}G_1 + \frac{5}{3}F \cdot \cos \alpha \cong 22875 \quad [\text{N}]$$

$$R_{Dz} = \frac{\sqrt{3}}{2}G_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}R_B + \frac{5}{2}F \cdot \sin \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}F \cdot \cos \alpha \cong 1359.5 \quad [\text{N}]$$

$$R_{Az} = G_1 + G_2 + F \cos \alpha - R_{Dz} - R_B \cong 5490.5 \quad [\text{N}]$$

Literatura: [4] rozdz. 5. str. 101÷113; rozdz. 6. str. 114÷137.

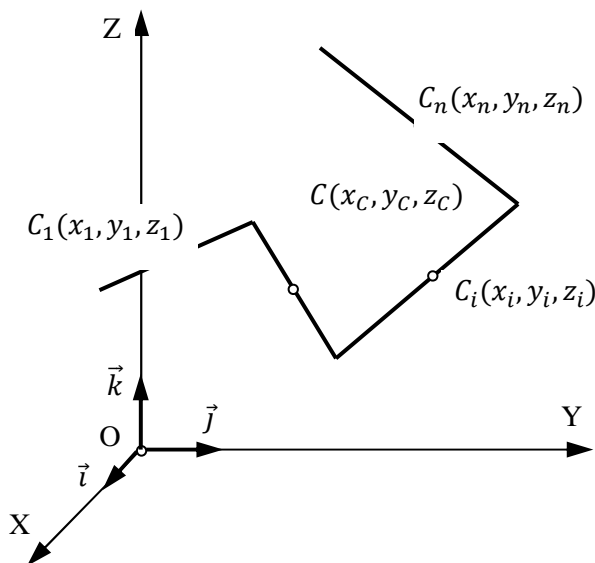
Temat 6. Środek ciężkości ciał jednorodnych liniowych, płaskich i przestrzennych.

Zagadnienia:

- moment statyczny geometryczny lub masowy ciała względem płaszczyzny lub osi;
- wyznaczanie współrzędnych środka ciężkości ciał liniowych, płaskich lub przestrzennych;

Przykład 6.1.

Wyznaczyć położenie środka ciężkości jednorodnej linii materialnej łamanej o długościach poszczególnych odcinków l_i i współrzędnych środków ciężkości tych odcinków $C_i(x_i, y_i, z_i)$.



Rozwiązanie:

Moment statyczny geometryczny i tego odcinka linii względem płaszczyzny OYZ (odcinek skupiamy myślowo w jego środku ciężkości C_i)

$$S_{iOYZ} = l_i \cdot x_i \quad [\text{m}^2]$$

oraz moment statyczny rzeczywisty całej linii względem płaszczyzny OYZ

$$S_{OYZ} = \sum_{i=1}^n (l_i \cdot x_i) \quad [\text{m}^2]$$

Na podstawie podstawowego twierdzenia o środku ciężkości, moment statyczny rzeczywisty jest równy momentowi statycznemu całej linii skupionej w jej środku ciężkości



$$S_{OYZ} = \sum_{i=1}^n (l_i \cdot x_i) = \left(\sum_{i=1}^n l_i \right) \cdot x_C \quad [\text{m}^2]$$

stąd otrzymuje się współrzędną x

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n (l_i \cdot x_i)}{\sum_{i=1}^n l_i}$$

i analogicznie pozostałe współrzędne

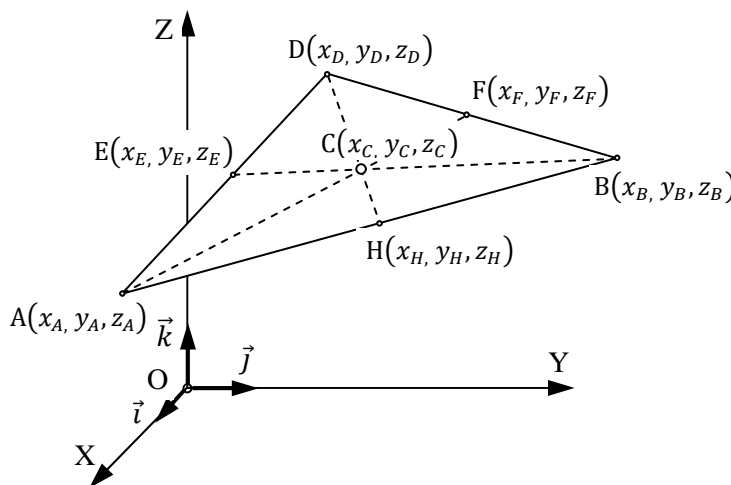
$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n (l_i \cdot y_i)}{\sum_{i=1}^n l_i} \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n (l_i \cdot z_i)}{\sum_{i=1}^n l_i}$$

W przypadku niejednorodnej odcinkami linii materialnej, tzn. niejednakowych gęstościach liniowych ρ_i poszczególnych odcinków, należy w powyższych wzorach uwzględnić gęstość ρ_i

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n (l_i \cdot \rho_i \cdot x_i)}{\sum_{i=1}^n (l_i \cdot \rho_i)} \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n (l_i \cdot \rho_i \cdot y_i)}{\sum_{i=1}^n (l_i \cdot \rho_i)} \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n (l_i \cdot \rho_i \cdot z_i)}{\sum_{i=1}^n (l_i \cdot \rho_i)}$$

Przykład 6.2.

Należy wyznaczyć położenie środka ciężkości trójkąta o podanej geometrii względem układu OXYZ.



Rozwiązanie:

Dowodzi się na podstawie tw. Talesa, że środek ciężkości trójkąta $C(x_C, y_C, z_C)$ leży w punkcie przecięcia się środkowych AF, DH i BE i że dzielą się one w stosunku 1:2, tzn.

$$\frac{AC}{FC} = \frac{BC}{EC} = \frac{DC}{HC} = \frac{2}{1}$$

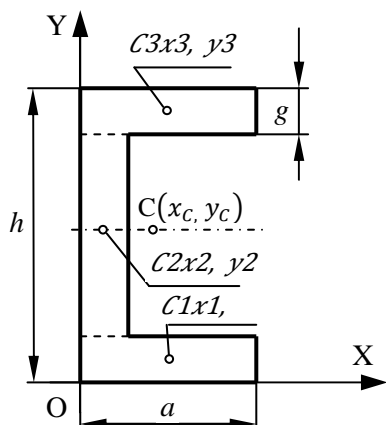
Stąd wynika natychmiast, że środek ciężkości C leży w odległości jednej trzeciej wysokości trójkąta od jego podstawy.

Można wykazać ponadto, że współrzędne środka ciężkości x_C, y_C, z_C są średnią arytmetyczną współrzędnych wierzchołków trójkąta

$$x_C = \frac{x_A + x_B + x_D}{3}; \quad y_C = \frac{y_A + y_B + y_D}{3}; \quad z_C = \frac{z_A + z_B + z_D}{3}$$

Przykład 6.3.

Należy wyznaczyć położenie środka ciężkości $C(x_C, y_C)$ powierzchni przekroju ceownika o wymiarach $a = 4g, h = 6g, g$ pokazanych na schemacie.



Rozwiązanie:

Powierznię przekroju kątownika dzieli się na figury, tutaj prostokąty, dla których łatwo znaleźć środek ciężkości. Współrzędne środków ciężkości poszczególnych prostokątów są następujące:

$$x_1 = \frac{a}{2}; \quad y_1 = \frac{g}{2}; \quad x_2 = \frac{g}{2}; \quad y_2 = \frac{h}{2}$$

$$x_3 = \frac{a}{2}; \quad y_3 = h - \frac{g}{2}$$

Moment statyczny S_y całego pola powierzchni przekroju względem osi OY jest sumą momentów statycznych pól powierzchni trzech prostokątów, które zgodnie z podstawowym twierdzeniem o środku ciężkości można skupić w ich środkach ciężkości, stąd

$$S_y = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3 = a \cdot g \cdot x_1 + (h - 2 \cdot g) \cdot g \cdot x_2 + a \cdot g \cdot x_3 =$$

$$= a \cdot g \cdot \frac{a}{2} + (h - 2 \cdot g) \cdot g \cdot \frac{g}{2} + a \cdot g \cdot \frac{a}{2} = 18 g^3 \quad [\text{m}^3]$$

Zgodnie z podstawowym tw. o środku ciężkości można całe pole przekroju skupić w jego środku ciężkości i wówczas moment statyczny jest równy

$$S_y = (P_1 + P_2 + P_3) \cdot x_c = [a \cdot g + (h - 2 \cdot g) \cdot g + a \cdot g] \cdot x_c = 12 g^2 \cdot x_c$$

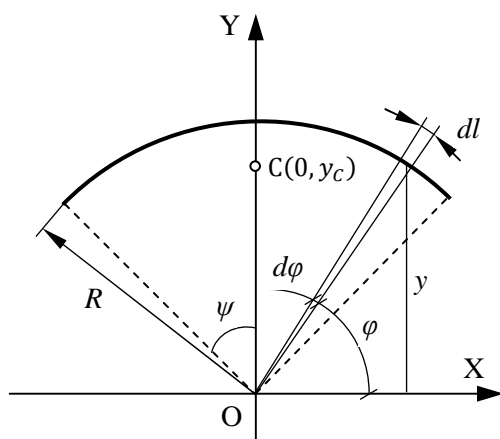
Z porównania powyższych momentów statycznych: rzeczywistego i zastępczego, otrzymuje się współrzędną x_c

$$x_c = \frac{18 g^3}{12 g^2} = 1.5 g$$

Oczywiście ze względu na symetrię przekroju współrzędna $y_c = h/2$.

Przykład 6.4.

Należy wyznaczyć położenie środka ciężkości odcinka okręgu o promieniu R i kącie rozwarcia 2ψ , położonego symetrycznie względem osi OY w sposób pokazany na rysunku.



Rozwiązanie:

W przypadku ciał kołowych, kulistych, obłych nie istnieje możliwość podziału takich ciał na skończoną ilość ciał o znanych środkach ciężkości, tak jak w poprzednim przykładzie przekroju ceownika. Należy więc dokonać podziału odcinka okręgu na nieskończoną liczbę nieskończenie małych łuków okręgu o długości dl , przy czym

$$dl = R d\varphi \quad [\text{m}]$$

Elementarny moment statyczny tego łuku względem osi OX jest równy

$$dS_x = y \cdot dl = R \cdot \sin \varphi \cdot dl = R^2 \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi \quad [\text{m}^2]$$



Rzeczywisty moment statyczny całego odcinka okręgu jest sumą elementarnych momentów statycznych

$$S_x = \int dS_x = \int_{\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi}^{\varphi = \frac{\pi}{2} + \psi} R^2 \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = R^2 \cdot [-\cos \varphi]_{\frac{\pi}{2} - \psi}^{\frac{\pi}{2} + \psi} =$$

$$= R^2 \cdot \left[-\cos \left(\frac{\pi}{2} + \psi \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right) \right] = 2 \cdot R^2 \cdot \sin \psi \text{ [m}^2\text{]}$$

Na podstawie podstawowego tw. o środku ciężkości rzeczywisty moment statyczny ciała jest równy momentowi statycznemu całego ciała skupionego w jego środku ciężkości

$$S_x = R \cdot 2\psi \cdot y_C \text{ [m}^2\text{]}$$

stąd z porównania obu wyrażeń otrzymuje się współrzędną y_C

$$y_C = R \frac{\sin \psi}{\psi}$$

W szczególnym przypadku półokręgu otrzymuje się

$$y_C = \frac{2}{\pi} R \cong 0.637 R.$$

Zadanie 6.5.

Wykazać, że środek ciężkości jednorodnego stożka kołowego o wysokości H leży w odległości $H/4$ od jego podstawy.

Literatura: [2] rozdz. 9. str. 195÷211; [4] rozdz. 7. str. 138÷151.

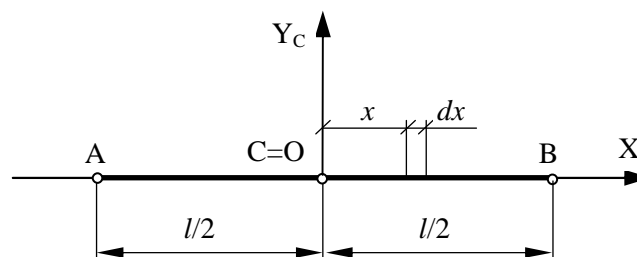
Temat 7. Momenty bezwładności i dewiacji ciał jednorodnych.

Zagadnienia:

- wyznaczanie momentów geometrycznych i masowych ciał liniowych i płaskich;
- wyznaczanie promienia bezwładności ciała;
- zastosowanie transformacji równoległej momentów bezwładności.

Przykład 7.1.

Wyznaczyć masowe momenty bezwładności jednorodnego pręta prostego o długości l i masie m względem osi prostopadłej do pręta i przechodzącej przez jego środek ciężkości C lub przez jego koniec.



Rozwiązanie:

Pręt zostaje podzielony na nieskończenie małe elementy o długości dx i o masie

$$dm = \frac{m}{l} dx \quad [\text{kg}]$$



Elementarny moment bezwładności względem osi OY_C przechodzącej przez środek ciężkości pręta jest równy

$$dJ_{y_C} = x^2 \cdot dm = \frac{m}{l} x^2 dx \quad [\text{kgm}^2]$$

natomiast całkowity moment bezwładności jest sumą momentów elementarnych

$$J_{y_C} = \int x^2 \cdot dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{m}{l} x^2 dx = \frac{m}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 dx = \frac{m \cdot l^2}{12} \quad [\text{kgm}^2]$$

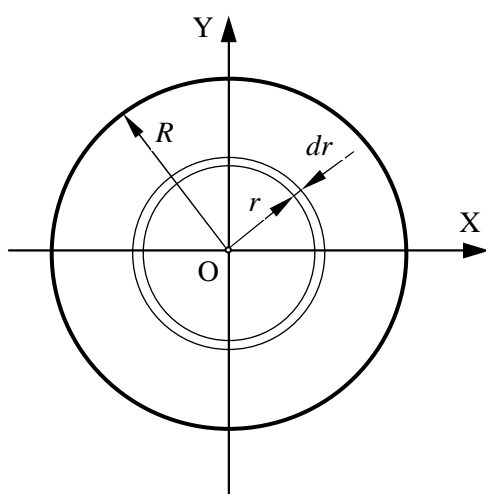
Moment bezwładności względem osi Y_A przechodzącej przez koniec pręta można wyznaczyć na podstawie tw. Steinera

$$J_{y_A} = J_{y_C} + m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{m \cdot l^2}{3} \quad [\text{kgm}^2]$$

Przykład 7.2.

Należy wyznaczyć momenty bezwładności geometryczne i masowe, oraz promienie bezwładności pola powierzchni jednorodnego koła o masie m i promieniu R . Na tej podstawie wyznaczyć również moment bezwładności jednorodnego walca kołowego o masie m i promieniu zewnętrznym R .

Rozwiązanie:



Pole powierzchni koła dzieli się na współśrodkowe nieskończenie cienkie elementarne pierścienie o promieniu wewnętrznym r i grubości dr . Pole powierzchni elementarnego pierścienia

$$dP = 2\pi r dr \quad [\text{m}^2]$$

Elementarny geometryczny moment bezwładności pola powierzchni koła względem bieguna O

$$dJ_O = r^2 dP = 2\pi r^3 dr \quad [\text{m}^2]$$

oraz całkowity geometryczny moment pola powierzchni koła

$$J_O = \int dJ_O = \int_0^R 2\pi r^3 dr = \pi \frac{R^4}{2} = \pi \frac{D^4}{32} \quad [\text{m}^4]$$

Całkowity masowy moment bezwładności pola powierzchni koła względem bieguna O otrzyma się po pomnożeniu momentu geometrycznego przez gęstość powierzchniową ρ_p

$$J_O = J_O \rho_p = \pi \frac{R^4}{2} \frac{m}{\pi R^2} = \frac{mR^2}{2} = \frac{mD^2}{8} \quad [\text{kgm}^2]$$

Momenty bezwładności geometryczne lub masowe względem osi OX lub OY można wyznaczyć na podstawie twierdzenia:

$$J_x + J_y = J_O$$

przy czym w rozważanym przypadku osie OX i OY są osiami symetrii koła, stąd $J_x = J_y$ a więc

$$J_x = J_y = \frac{J_O}{2} = \pi \frac{R^4}{4} = \pi \frac{D^4}{64} \quad [\text{m}^4]$$

oraz



$$J_x = J_y = \frac{mR^2}{4} = \frac{mD^2}{16} \quad [\text{kgm}^2]$$

Promienie bezwładności koła względem bieguna O lub osi OX i OY

$$i_o = \sqrt{\frac{J_o}{P}} = \sqrt{\frac{\pi R^4/2}{\pi R^2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} \quad [\text{m}]$$

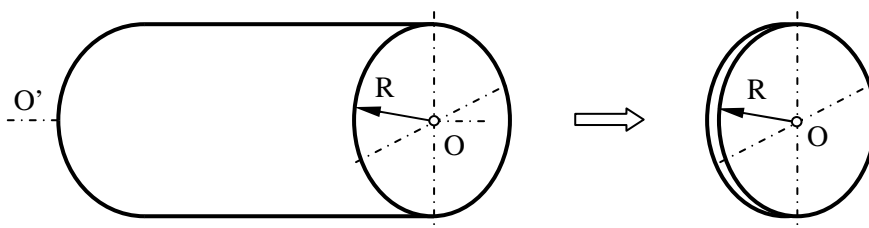
$$i_x = i_y = \sqrt{\frac{J_x}{P}} = \sqrt{\frac{\pi R^4/4}{\pi R^2}} = \frac{R}{2} \quad [\text{m}]$$

przy czym zachodzi oczywiście zależność

$$i_x^2 + i_y^2 = i_o^2$$

Moment bezwładności jednorodnego walca o masie m i promieniu R względem jego osi OO' jest równy momentowi bezwładności jednorodnego koła o takiej samej masie m i promieniu R , tzn.

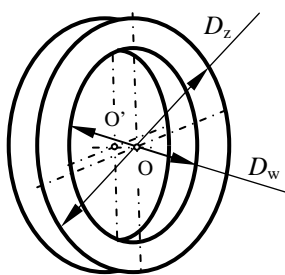
$$J_{oo'} = \frac{mR^2}{2} = \frac{mD^2}{8} \quad [\text{kgm}^2]$$



Zadanie 7.3.

Należy wykazać, że moment bezwładności materialnego jednorodnego pierścienia o masie m_p i średnicach: zewnętrznej D_z wewnętrznej D_w jest określony wzorem

$$J_{oo'} = \frac{m_p(D_z^2 + D_w^2)}{8} \quad [\text{kgm}^2]$$



a średnica bezwładności D wzorem

$$D = \sqrt{\frac{D_z^2 + D_w^2}{2}} \quad [\text{m}]$$

Literatura: [2] rozdz. 7. str. 142÷170; [4] rozdz. 16. str. 269÷279.

Temat 8. Tarcie.

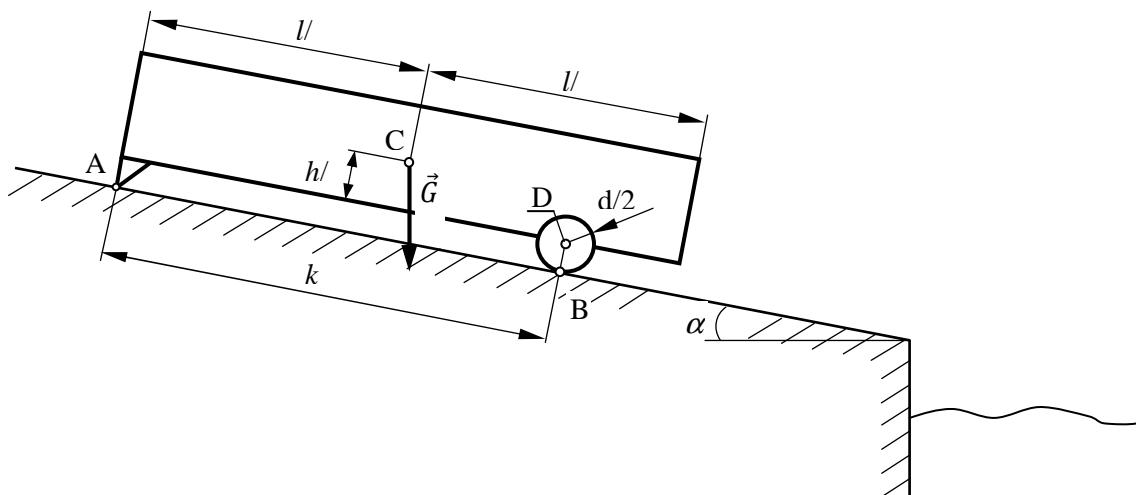
Zagadnienia:

- zastosowanie praw tarcia ślizgowego suchego i tarcia tocznego;
- równowaga układów mechanicznych z uwzględnieniem sił tarcia.



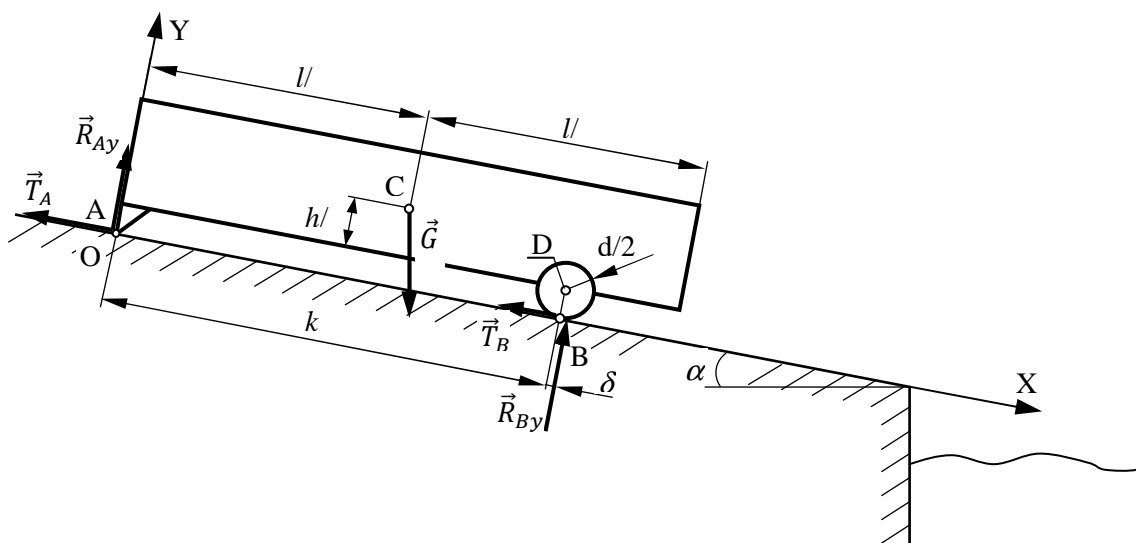
Przykład 8.1.

Płaski model kadłuba pontonu w kształcie prostokąta o długości $l = 7$ m i wysokości $h = 1$ m oraz ciężarze $G = 5000$ N, spoczywa na pochylni wsparty na ślizgu o współczynniku tarcia ślizgowego suchego $\mu = 0.2$ oraz na rolce o średnicy $d = 0.2$ m i współczynniku tarcia tocznego $\delta = 2$ mm. Jakie musi być nachylenie α pochylni względem poziomu, aby ponton mógł sam z niej zjechać?



Rozwiązanie:

Kładzie się układ współrzędnych OXY w taki sposób, że punkt O pokrywa się z punktem A, a oś OX jest równoległa do pochylni. Przykłada się do modelu pontonu wszystkie siły zewnętrzne (tutaj jest to tylko pionowa siła ciężkości \vec{G}) oraz wszystkie siły reakcji podpar: w punkcie A składową styczną czyli siłę tarcia \vec{T}_A oraz składową normalną \vec{R}_{Ay} , w punkcie B składową styczną \vec{T}_B i składową normalną \vec{R}_{By} przesuniętą z punktu B teoretycznego styku rolki z podłożem o wartość δ współczynnika tarcia tocznego.



Warunki równowagi statycznej modelu pontonu określone są dwoma równaniami sum składowych sił na osiach OX i OY oraz równaniem sumy momentów sił względem punktu np. O



$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= -T_A - T_B + G \sin \alpha = 0 \\ \sum F_{iy} &= R_{Ay} + R_{By} - G \cos \alpha = 0 \\ \sum M_{iB} &= R_{By} \cdot \delta + G \cdot \cos \alpha \cdot \left(k - \frac{l}{2}\right) - G \cdot \sin \alpha \cdot \left(\frac{h}{2} + \frac{d}{2}\right) - R_{Ay} \cdot k = 0\end{aligned}$$

W powyższych trzech równaniach jest pięć niewiadomych: T_A , T_B , R_{Ay} , R_{By} i α . Dodatkowe dwa równania równowagi układu wynikają z praw tarcia ślizgowego suchego i tarcia toczonego. Zakłada się, że na ślizgu A tarcie jest maksymalnie rozwinięte, czyli osiąga maksymalną wartość

$$T_A = \mu \cdot R_{Ay}$$

natomiast w punkcie B wartość siły tarcia T_B jest taka, że umożliwia toczenie się rolki bez poślizgu

$$\sum M_{iD}^{(rolka)} = R_{By} \cdot \delta - T_B \cdot \frac{d}{2} = 0$$

czyli

$$T_B = \frac{2\delta}{d} R_{By}$$

przy czym należałoby sprawdzić, czy ta wartość tarcia ślizgowego nie przekracza wartości maksymalnej określonej współczynnikiem tarcia ślizgowego w punkcie B.

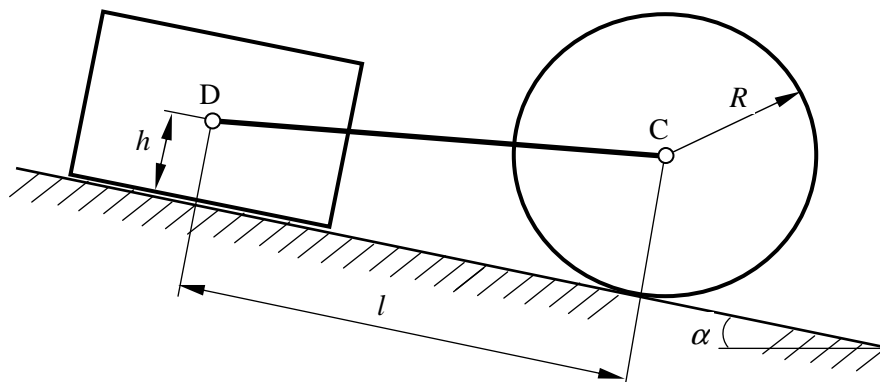
Po uwzględnieniu powyższych dwóch dodatkowych równań otrzymuje się po przekształceniach wyrażenie określające kąt α

$$\tan \alpha = \frac{\mu \left(k - \frac{l}{2} + \delta\right) + \frac{\delta}{d} l}{k + \delta + \frac{h+d}{2} \left(\mu - \frac{2\delta}{d}\right)} \cong \frac{\mu \left(k - \frac{l}{2}\right) + \frac{\delta}{d} l}{k + \frac{h+d}{2} \left(\mu - \frac{2\delta}{d}\right)} \cong 0.0723$$

czyli kąt α ni powinien być mniejszy niż 4.13° .

Zadanie 8.2.

Jednorodny walec o ciężarze $G_2 = 10$ kN i promieniu $R = 1$ m połączony sztywnym nieważkim prętem CD z jednorodnym prostopadłościanem o ciężarze $G_1 = 20$ kN spoczywają na równi pochyłej nachylniej do poziomu pod kątem $\alpha = 30^\circ$. Współczynnik tarcia toczonego walca wynosi $\delta = 5$ mm. Jaki musi być współczynnik tarcia ślizgowego μ między prostopadłościanem a równią, aby układ pozostawał w spoczynku.



Literatura: [4] rozdz. 2. str. 33÷42; rozdz. 3. str. 74÷95.



Temat 9. Kinematyka punktu materialnego.

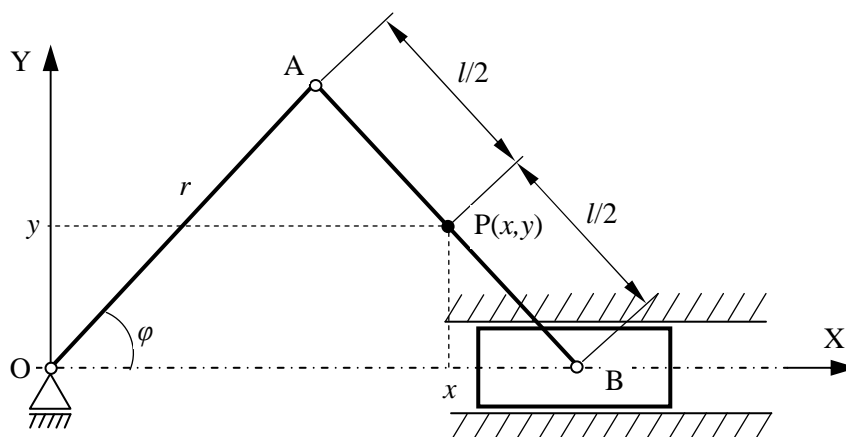
Zagadnienia:

- określanie równań ruchu i toru ruchu punktu materialnego;
- wyznaczanie promienia krzywizny toru ruchu;
- wyznaczanie wektorów prędkości i przyspieszenia punktu materialnego.

Przykład 9.1.

W mechanizmie korbowo-tłokowym ramie wykorbienia OA i korbówód AB mają jednakową długość, tzn. $OA = r = AB = l = 0.4$ m. Ramię wykorbienia porusza się z ustalonym przyspieszeniem kątowym $\varepsilon = 5 \text{ rad/s}^2$ oraz prędkością kątową w danej chwili $\omega = 10 \text{ rad/s}$. Należy:

- określić równanie ruchu i toru ruchu punktu P, znajdującego się na korbówódzie w odległości $PB = l/2$ od sworznia tłokowego;
- wyznaczyć wektory prędkości i przyspieszenia oraz promień krzywizny toru ruchu punktu P, dla położenia korby $\varphi = 0$;
- wyznaczyć wektory prędkości i przyspieszenia punktu końcowego korby A dla położenia korby $\varphi = 45^\circ$.



Rozwiązanie:

Ad. a) Układ współrzędnych OXY położono tak, że os OX jest osią symetrii tłoka a punkt O pokrywa się z osią wału korbowego. Równanie ruchu ustalonego obrotowego korby OA

$$\varphi(t) = \omega t = 10 \cdot t \quad [\text{rad}]$$

Równania parametryczne ruchu punktu P

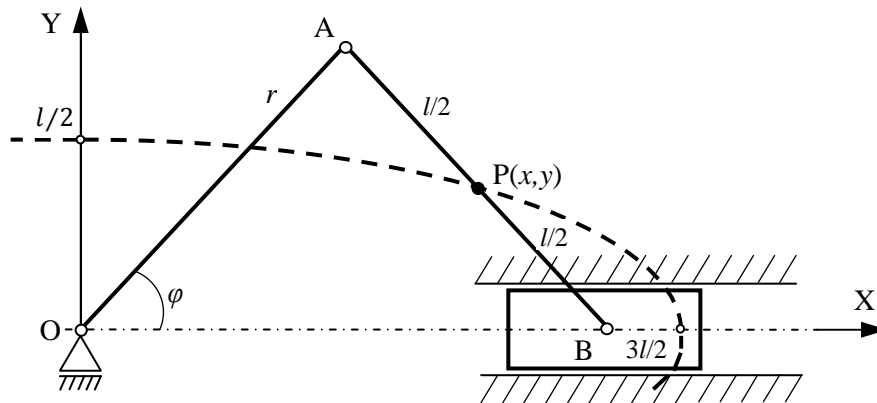
$$x(t) = r \cos \varphi + \frac{l}{2} \cos \varphi = \frac{3}{2} l \cos \varphi = \frac{3}{2} l \cos \omega t \quad [\text{m}]$$

$$y(t) = \frac{l}{2} \sin \varphi = \frac{l}{2} \sin \omega t$$

Równanie toru ruchu otrzyma się, po wyeliminowaniu z równań parametrycznych ruchu czasu t:

$$\frac{x^2(t)}{\left(\frac{3}{2}l\right)^2} + \frac{y^2(t)}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = (\cos \omega t)^2 + (\sin \omega t)^2 = 1$$

Jest to równanie elipsy o środku w punkcie O i o półosiach $3l/2$ i $l/2$.



Ad b) Różniczkując równania ruchu punktu P otrzymuje się równania składowych prędkości

$$\dot{x}(t) = -\frac{3}{2}l\omega \sin \omega t \quad \dot{y}(t) = \frac{l}{2}\omega \cos \omega t \quad [\text{m/s}]$$

a po kolejnym zróżniczkowaniu równania składowych przyspieszenia punktu P

$$\ddot{x}(t) = -\frac{3}{2}l\omega^2 \cos \omega t \quad \ddot{y}(t) = -\frac{l}{2}\omega^2 \sin \omega t \quad [\text{m/s}^2]$$

W położeniu początkowym ruchu, gdy punkt P znajduje się na osi OX droga kąтова $\varphi = 0$ i wówczas składowe prędkości i przyspieszenia są następujące

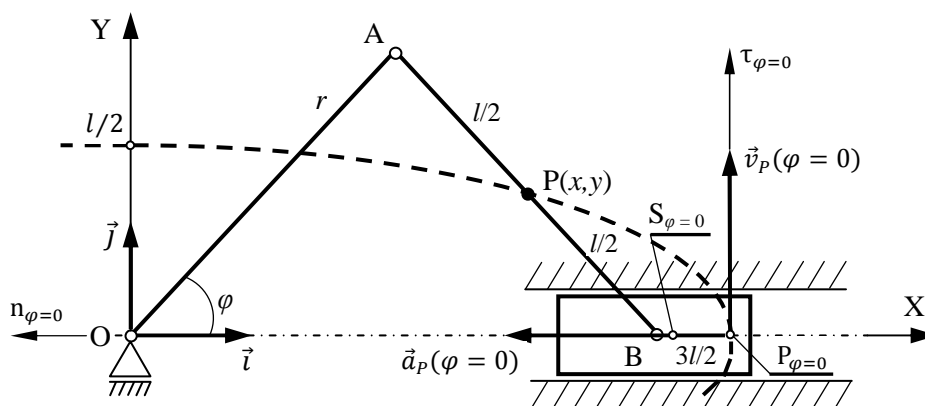
$$\dot{x}(t=0) = 0 \quad \dot{y}(t=0) = \frac{l}{2}\omega = 2 \quad [\text{m/s}]$$

$$\ddot{x}(t=0) = -\frac{3}{2}l\omega^2 = -60 \quad \ddot{y}(t=0) = 0 \quad [\text{m/s}^2]$$

a wektory prędkości i przyspieszenia

$$\vec{v}_P(t=0) = 2\vec{j} \quad \vec{a}_P(t=0) = -60\vec{i}$$

czyli wektor prędkości jest skierowany pionowo w górę wzdłuż osi OY, zaś wektor przyspieszenia – poziomo w lewo wzdłuż osi OX.



Wektor prędkości $\vec{v}_P(\varphi = 0)$ wyznacza oś styczną $\tau_{\varphi=0}$. Przyspieszenie $\vec{a}_P(\varphi = 0)$ jest całkowitym przyspieszeniem punktu P w chwili początkowej i leży ono na kierunku osi normalnej $n_{\varphi=0}$, czyli jest to jednocześnie składowa normalna \vec{a}_n przyspieszenia, której wartość określona jest wyrażeniem

$$a_n(\varphi = 0) = \frac{[v_P(\varphi = 0)]^2}{\rho(\varphi = 0)}$$

stąd promień krzywizny toru ruchu punktu P w chwili początkowej



$$\rho(\varphi = 0) = \frac{[v_p(\varphi = 0)]^2}{a_n(\varphi = 0)} = \frac{2^2}{60} = \frac{1}{15} \quad [\text{m}]$$

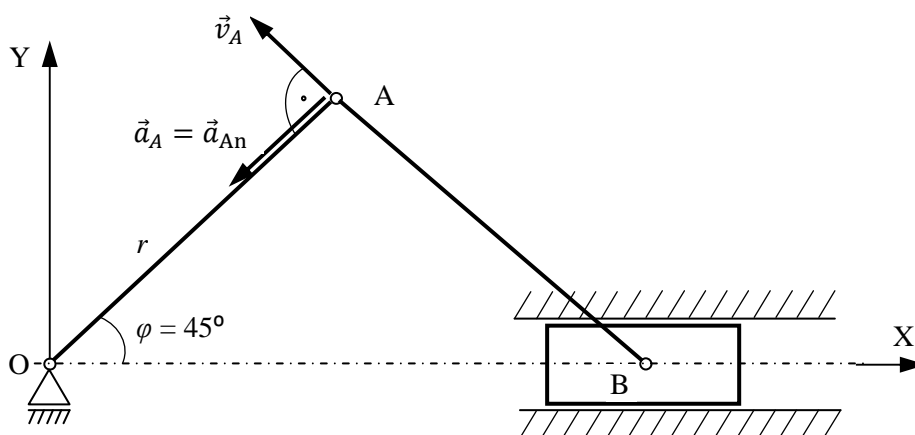
wyznaczający położenie środka krzywizny $S_{\varphi=0}$ toru ruchu w chwili początkowej.

Ad. c) Punkt końcowy korby A porusza się ruchem jednostajnym z prędkością kątową korby $\omega = 10$ rad/s po okręgu o promieniu $OA = r = 0.4$ m. Wektor prędkości styczny do tego okręgu a prostopadły do promienia OA ma wartość

$$v_A = \omega \cdot r = 4 \quad [\text{m/s}]$$

Wektor przyspieszenia w ruchu jednostajnym po okręgu ma tylko składową normalną \vec{a}_{An} skierowaną do środka okręgu O. Wartość a_{An} tej składowej przyspieszenia wynosi

$$a_{An} = \frac{v_A^2}{r} = \frac{4^2}{0.4} = 40 \quad [\text{m/s}^2]$$



Zadanie 9.2.

Ciężarek zawieszony na sprężynie wykonuje prostoliniowe drgania harmoniczne wzdłuż osi OX. W chwili początkowej nieruchomy ciężarek wychylony był z położenia zerowego na odległość $x_0 = 0.05$ m. Ilość drgań na minutę wynosi $n = 150$ 1/min. Należy określić równanie harmonicznego ruchu ciężarka oraz równania parametryczne prędkości i przyspieszenia ciężarka oraz narysować wykresy tych wielkości. Wyznaczyć również amplitudy przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia ciężarka.

Literatura: [2] rozdz. 11.6. str. 241÷243; [4] rozdz. 8. str. 153÷168.

Temat 10. Kinematyka ciała doskonale sztywnego w ruchu postępowym i obrotowym.

Zagadnienia:

- kinematyka tłoka typowego silnika spalinowego podczas ustalonego ruchu obrotowego wału korbowego;
- wyznaczanie równań ruchu obrotowego jednostajnego i jednostajnie zmiennego ciała doskonale sztywnego.



Przykład 10.1.

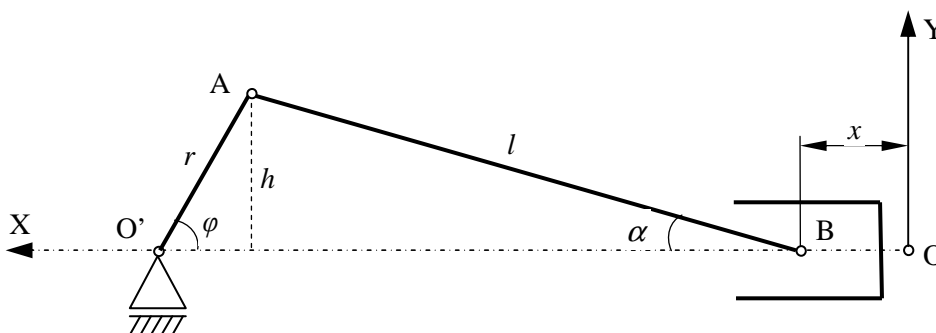
Należy wyznaczyć równania parametryczne przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia tłoka typowego silnika spalinowego podczas jednostajnego ruchu obrotowego wału korbowego.

Rozwiązanie:

W typowym silniku spalinowym stosunek λ długości r korby do długości l korbowodu wynosi $\lambda = r/l = 1/4 : 1/3$. Równanie parametryczne ruchu jednostajnego obrotowego wału korbowego określa drogę kątową $\varphi(t)$ w sposób następujący

$$\varphi(t) = \omega t \quad [\text{rad}]$$

gdzie ω [rad/s] jest prędkością kątową wału korbowego.



Przemieszczenie tłoka x

$$x = r + l - r \cos \varphi - l \cos \alpha$$

przy czym kąt α można określić za pomocą kąta φ

$$h = r \sin \varphi = l \sin \alpha$$

stąd przy $\alpha < 90^\circ$

$$\sin \alpha = \frac{r}{l} \sin \varphi = \lambda \sin \varphi \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}$$

Po rozwinięciu pierwiastka $\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}$ w szereg Maclaurina przy $\lambda^2 \sin^2 \varphi \rightarrow 0$

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} \cong 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varphi$$

i uwzględnieniu zależności

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi)$$

otrzymuje się ostateczną postać równania parametrycznego ruchu tłoka

$$x(t) = r + \frac{r^2}{4l} - r \left(\cos \omega t + \frac{\lambda}{4} \cos 2\omega t \right) \quad [\text{m}]$$

a po zróżniczkowaniu – równania parametryczne prędkości i przyspieszenia tłoka

$$\dot{x}(t) = r\omega \left(\sin \omega t + \frac{\lambda}{2} \sin 2\omega t \right) \quad [\text{m/s}]$$

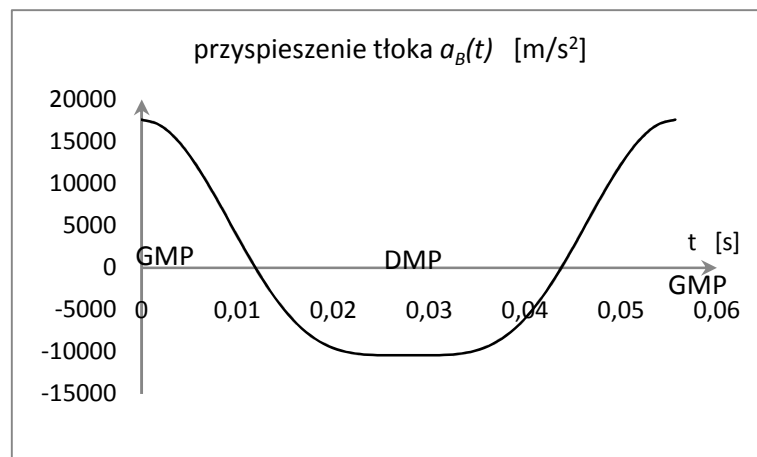
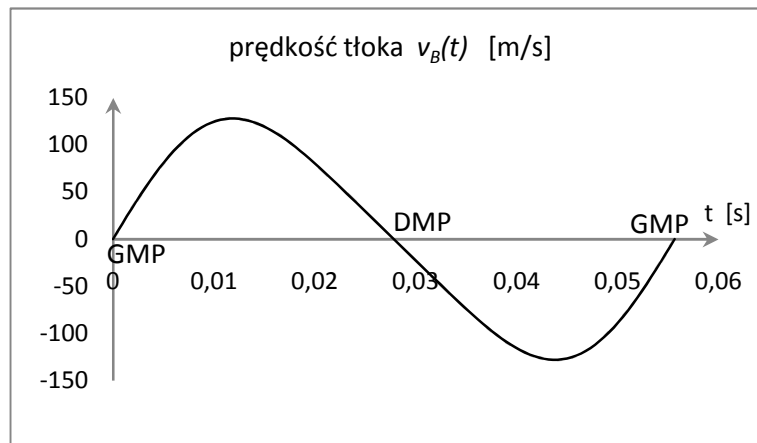
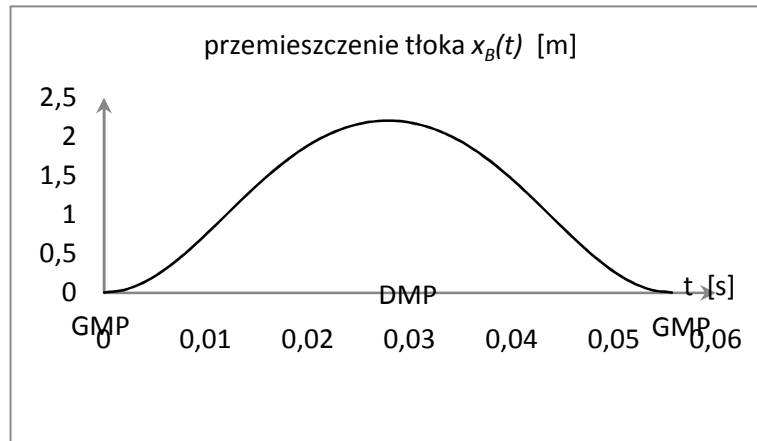
$$\ddot{x}(t) = r\omega^2 (\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t) \quad [\text{m/s}^2]$$

Ruch tłoka oraz jego prędkość i przyspieszenie składają się z dwóch składowych: harmonicznego podstawowego zmieniającej się z prędkością wału korbowego ω oraz z drugiej harmonicznego zmiennej z dwukrotnie większą prędkością kątową 2ω , przy czym amplituda drugiej harmonicznego przemieszczenia



nia stanowi $\lambda/4 \cong 0.125 \div 0.17$ amplitudy pierwszej harmonicznej, natomiast amplituda drugiej harmonicznej przyspieszenia stanowi aż

$\lambda \cong 0.25 \div 0.33$ amplitudy pierwszej harmonicznej. Stąd wykres przemieszczenia, prędkości a szczególnie przyspieszenia wyraźnie odbiega od wykresu funkcji harmoniczej. Na rysunkach poniżej pokazano przykładowe wykresy wielkości kinematycznych ruchu tłoka dla parametrów: $\omega = 112.8$ rad/s, $r = 1.1$ m, $l = 4.3$ m, $\lambda \cong 0.256$.





Można wykazać, że ekstremalna wartość przyspieszenia występuje w GMP (górnym martwym punkcie) i wynosi

$$a_{Bmax} = \ddot{x}_{max} = r\omega^2(1 + \lambda) \quad [\text{m/s}^2]$$

natomiast ekstremalna wartość prędkości tłoka wynosi

$$v_{Bmax} = \dot{x}_{max} = r\omega \sqrt{1 + \lambda^2} \quad [\text{m/s}]$$

i występuje dla kąta φ określonego wyrażeniem

$$\cos \varphi = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\lambda^2}}{4\lambda}$$

Zadanie 10.2.

Należy wyznaczyć równanie parametryczne $\varphi = \varphi(t)$ ruchu obrotowego jednostajnego ciała doskonale sztywnego, gdy prędkość kątowna ciała $\omega = \omega_0 = \text{const}$, oraz ruchu jednostajnie zmiennego, gdy przyspieszenie kątowne ciała $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$. Narysować również wykresy drogi kątowej $\varphi(t)$, prędkości kątowej $\omega(t)$ i przyspieszenia kątowego $\varepsilon(t)$ ciała.

Literatura: [4] rozdz. 10. str. 184÷191.

Temat 11. Kinematyka ciała doskonale sztywnego w ruchu płaskim.

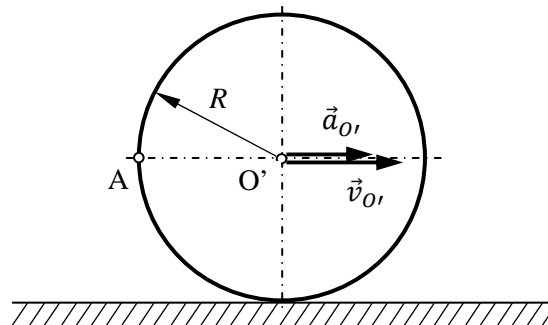
Zagadnienia:

- wyznaczanie prędkości kątowej i przyspieszenia kątowego ciała;
- wyznaczanie wektorów prędkości i przyspieszenia punktów ciała;
- wyznaczanie chwilowego środka obrotu i środka przyspieszeń.

Przykład 11.1.

Koło o promieniu $R = 1$ m toczy się po prostoliniowym torze w płaszczyźnie pionowej z prędkością środka koła $v_{O'} = 10$ m/s i przyspieszeniem środka koła $a_{O'} = 5$ m/s². Należy wyznaczyć:

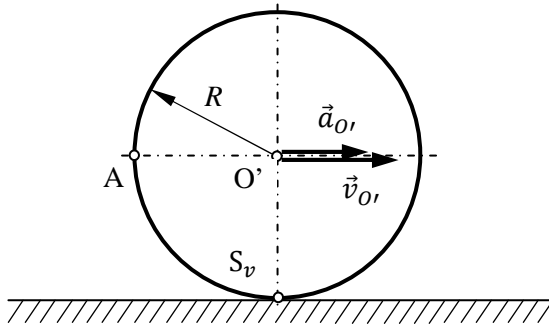
- chwilowy środek obrotu S_v , prędkość kątowną ω i przyspieszenie kątowe ε koła oraz przyspieszenie \vec{a}_{S_v} chwilowego środka obrotu S_v ;
- prędkość \vec{v}_A i przyspieszenie \vec{a}_A punktu A koła leżącego na poziomej średnicy koła.





Rozwiązanie:

Ad a) Zakładamy, że koło toczy się bez poślizgu, więc punkt styku koła z podłożem jest w danym momencie ruchu nieruchomy, tzn. jego prędkość jest równa zero. Jest to więc chwilowy środek obrotu koła S_v .



Prędkość punktu O' można teraz określić jako prędkość punktu w ruchu po okręgu o promieniu $S_vO'=R$ i o środku w punkcie S_v

$$v_{O'} = \omega R$$

stąd chwilowa prędkość kątowna koła

$$\omega = \frac{v_{O'}}{R} = \frac{10}{1} = 10 \quad [\text{rad/s}]$$

Przyspieszenie \vec{a}_{S_v} chwilowego środka obrotu S_v można uważać, jako złożenie przyspieszenia $\vec{a}_{O'}$ bieguna O' oraz przyspieszenia względnego $\vec{a}_{S_v/O'}$ punktu S_v względem bieguna O'

$$\vec{a}_{S_v} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}_{S_v/O'}$$

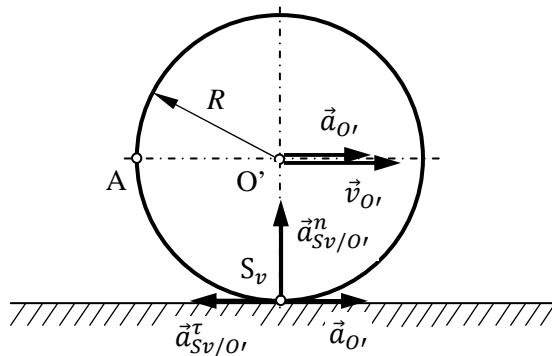
przy czym przyspieszenie względne jest sumą przyspieszenia względnego stycznego $\vec{a}_{S_v/O'}^{\tau}$ i przyspieszenia względnego normalnego $\vec{a}_{S_v/O'}^n$, stąd

$$\vec{a}_{S_v} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}_{S_v/O'}^{\tau} + \vec{a}_{S_v/O'}^n$$

gdzie:

$$a_{S_v/O'}^{\tau} = \varepsilon \cdot S_vO' = \varepsilon \cdot R \quad [\text{m/s}^2]$$

$$a_{S_v/O'}^n = \omega^2 \cdot S_vO' = \omega^2 \cdot R \quad [\text{m/s}^2].$$



Wektory przyspieszenia $\vec{a}_{O'}$ i $\vec{a}_{S_v/O'}^{\tau}$ leżą na tym samym kierunku stycznym do koła w punkcie S_v . Ponieważ koło porusza się bez poślizgu, więc punkt S_v styku koła z podłożem nie może wykonać w kierunku stycznym jakiegokolwiek ruchu, czyli przyspieszenie punktu S_v w tym kierunku musi być równe 0, stąd równanie wektorowe

$$\vec{a}_{S_v/O'}^{\tau} + \vec{a}_{O'} = 0$$

lub

$$\vec{a}_{S_v/O'}^{\tau} = -\vec{a}_{O'}$$

oraz $a_{S_v/O'}^{\tau} = a_{O'}$, skąd otrzymuje się wartość przyspieszenia kątownego koła

$$\varepsilon = a_{O'}/R = 5/1 = 5 \quad [\text{rad/s}^2]$$

Całkowite przyspieszenie chwilowego środka obrotu S_v jest więc równe przyspieszeniu względnemu normalnemu $\vec{a}_{S_v/O'}^n$ punktu S_v względem O'

$$\vec{a}_{S_v} = \vec{a}_{S_v/O'}^n$$

przy czym wartość tego przyspieszenia wynosi

$$a_{S_v} = a_{S_v/O'}^n = \omega^2 \cdot R = 100 \quad [\text{m/s}^2]$$

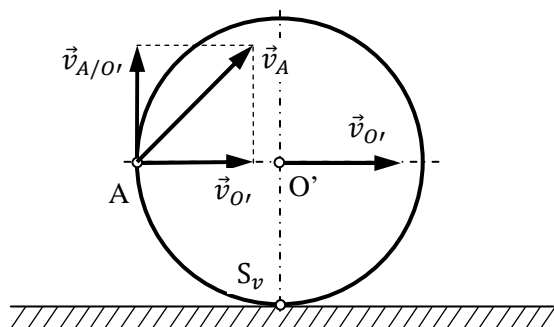


Ad. b) Prędkość punktu A koła można przedstawić jako sumę wektorową prędkości pewnego bieguna, np. O' oraz prędkości względnej $\vec{v}_{A/O'}$ punktu A względem tegoż bieguna

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{O'} + \vec{v}_{A/O'}$$

przy czym

$$v_{A/O'} = \omega \cdot R = 10 \quad [\text{m/s}]$$



Prędkość \vec{v}_A jest prostopadła do kierunku AS_v a wartość tej prędkości wynosi

$$v_A = \sqrt{v_{O'}^2 + v_{A/O'}^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \quad [\text{m/s}]$$

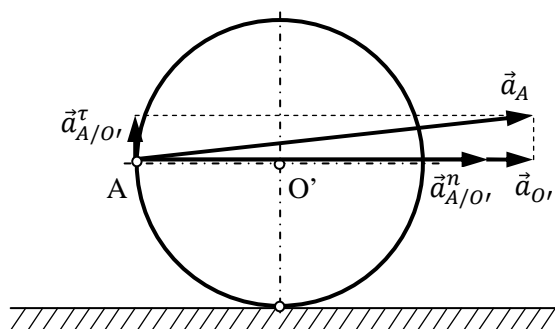
Przyspieszenie punktu A można przedstawić jako sumę geometryczną przyspieszenia pewnego bieguna, np. O' , oraz przyspieszenia względnego $\vec{a}_{A/O'}$ punktu A względem tegoż bieguna

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{O'} + \vec{a}_{A/O'} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}_{A/O'}^{\tau} + \vec{a}_{A/O'}^n$$

przy czym

$$a_{A/O'}^{\tau} = \varepsilon \cdot AO' = \varepsilon \cdot R = 5 \quad [\text{m/s}^2]$$

$$a_{A/O'}^n = \omega^2 \cdot AO' = \omega^2 \cdot R = 100 \quad [\text{m/s}^2]$$



Wartość przyspieszenia punktu A wynosi

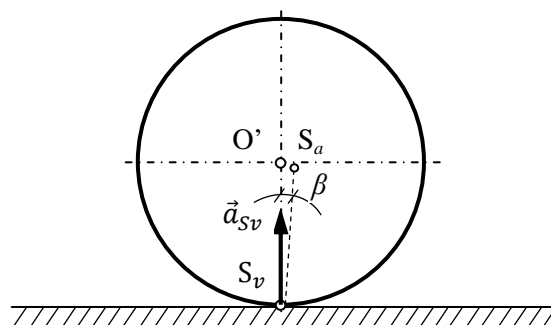
$$a_A = \sqrt{(a_{A/O'}^n + a_{O'})^2 + (a_{A/O'}^{\tau})^2} = \sqrt{105^2 + 5^2} = 105.12 \quad [\text{m/s}^2]$$

Ad. c) Chwilowy środek przyspieszeń S_a leży na prostej odchylonej od kierunku przyspieszenia dowolnego punktu ciała, np. punktu S_v , o kąt β określony wyrażeniem

$$\tan \beta = \frac{\varepsilon}{\omega^2} = \frac{5}{10^2} = 0.05$$

czyli o kąt $\beta = 2.86^\circ$, w kierunku wyznaczonym zwrotem przyspieszenia kąowego ε (tutaj w prawo). Odległość środka przyspieszeń S_a od punktu (tutaj S_v) wynosi

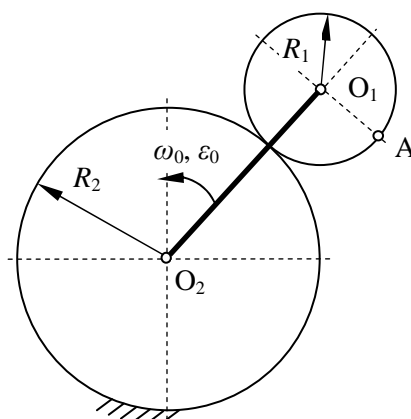
$$S_a S_v = \frac{a_{S_v}}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}} = \frac{100}{\sqrt{10^4 + 5^2}} = \frac{100}{100.12} \cong 0.999 \quad [\text{m}]$$



Przykład 11.2.

W przekładni planetarnej koło satelitarne o promieniu $R_1 = 0.2$ m obiega nieruchome koło centralne o promieniu $R_2 = 0.4$ m napędzane jarmem O_1O_2 , które porusza się w danej chwili z prędkością kątową $\omega_0 = 5$ rad/s i przyspieszeniem kątowym $\varepsilon_0 = 20$ rad/s². Należy wyznaczyć dla położenia koła satelitarne pokazanego na rysunku:

- chwilowy środek obrotu S_v , prędkość kątową ω_1 i przyspieszenie kątowe ε_1 koła satelitarne oraz przyspieszenie \vec{a}_{S_v} chwilowego środka obrotu S_v tego koła;
- prędkość \vec{v}_A i przyspieszenie \vec{a}_A punktu A pokazanego na rysunku;
- chwilowy środek przyspieszeń S_a koła satelitarne.



Literatura: [2] rozdz. 13 str. 300÷337; [4] rozdz. 11. str. 192÷214.

Temat 13. Analiza kinematyczna mechanizmów.

Zagadnienia:

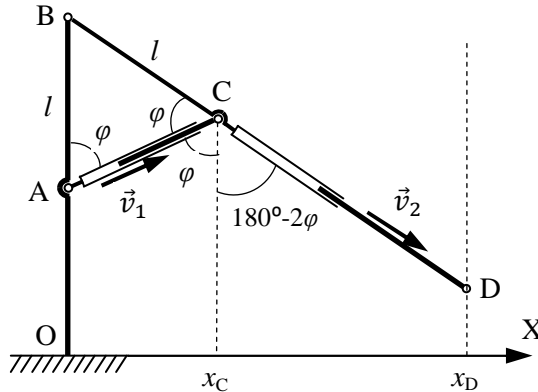
- wyznaczanie położenia i torów ruchu punktów elementów mechanizmów;
- wyznaczanie prędkości i przyspieszeń członów i ich punktów;
- wyznaczanie środków prędkości i przyspieszeń oraz centroid członów mechanizmów płaskich.

Przykład 13.1.

Konstrukcja nośna robota składa się z pionowego utwierdzonego słupa AB i dwóch ramion AC i BD o zmiennej długości, uwarunkowanej pracą siłowników hydraulicznych zainstalowanych w tych ramio-



nach, w sposób pokazany na rysunku. Należy określić zależność między prędkościami ruchu siłowników, warunkujących pionowy ruch końca D ramienia BD.



Rozwiązanie:

Odcinki ramion AB i BC są jednakowej długości, stąd trójkąt ABC jest trójkątem równoramiennym i oba kąty u podstawy trójkąta są równe φ .

Współrzędne x punktów C i D są określone wyrażeniami

$$x_C = AC \cdot \sin \varphi = 2l \sin \varphi \cos \varphi = l \sin 2\varphi$$

$$x_D = x_C + CD \cdot \sin(180^\circ - 2\varphi) = (l + CD) \sin 2\varphi$$

stąd

$$CD = \frac{x_D}{\sin 2\varphi} - l$$

Koniec D ramienia BD ma przemieszczać się wzdłuż prostej pionowej, czyli $x_D = \text{const}$ i stąd

$$\frac{dx_D}{dt} = \frac{d}{dt} [(l + CD) \sin 2\varphi] = \frac{d(CD)}{dt} \sin 2\varphi + 2\dot{\varphi} (l + CD) \cos 2\varphi = 0$$

Prędkość \vec{v}_2 wysuwu siłownika CD ma wartość równą szybkości zmiany długości CD

$$v_2 = \frac{d(CD)}{dt} = -2\dot{\varphi} \frac{x_D \cos 2\varphi}{(\sin 2\varphi)^2} \quad [\text{m/s}]$$

natomiast prędkość \vec{v}_1 wysuwu siłownika AC ma wartość równą szybkości zmiany długości AC

$$v_1 = \frac{d(AC)}{dt} = \frac{d}{dt} (2l \cos \varphi) = -2l\dot{\varphi} \sin \varphi \quad [\text{m/s}]$$

czyli

$$\dot{\varphi} = \frac{-v_1}{2l \sin \varphi} \quad [\text{rad/s}]$$

Ostatecznie, w celu zapewnienia pionowego ruchu końca D ramienia CD, między prędkościami wysuwu siłowników musi zachodzić zależność

$$v_2 = \frac{x_D}{l} \frac{\cos 2\varphi}{\sin \varphi (\sin 2\varphi)^2} v_1$$

przy czym, jeżeli

- $\varphi \rightarrow 0$ to $v_2 \rightarrow \infty$
- $\varphi \rightarrow 45^\circ$ to $v_2 \rightarrow 0$.

Zadanie 13.2.

W mechanizmie korbowo-tłokowym należy wyznaczyć, dla pionowego położenia korby OA o długości $r = 0.2$ m, chwilowy środek obrotu S_v oraz prędkość kątową ω i przyspieszenie kątowe ε korbodu AB o długości $l = 0.6$ m, jeżeli korba obraca się ze stałą prędkością kątową $\omega_0 = 20$ rad/s.

Literatura: [2] rozdz. 13 str. 300÷337; [4] rozdz. 11 str. 192÷214; [4] rozdz. 12 str. 215÷219.



Temat 14. Dynamika punktu materialnego.

Zagadnienia:

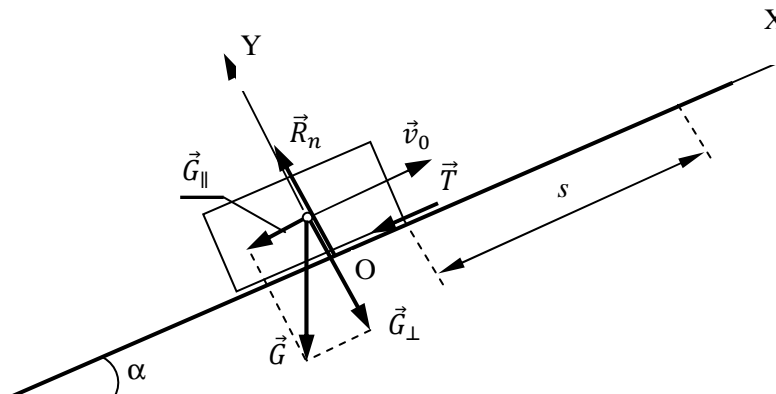
- określanie równania dynamicznego ruchu punktu materialnego;
- wyznaczanie poprzez całkowanie równań parametrycznych i parametrów ruchu punktu materialnego;
- wyznaczanie sił reakcji więzów.

Przykład 14.1.

Ciało doskonale sztywne o masie $m = 2$ kg, traktowane jako punkt materialny, porusza się do góry wzdłuż równi pochyłej, nachylonej pod kątem $\alpha = 30^\circ$. W chwili początkowej ciało ma prędkość $v_0 = 10$ m/s. Współczynnik tarcia ślizgowego suchego między równią a ciałem wynosi $\mu = 0.2$. Należy określić równanie dynamiczne ruchu ciała i wyznaczyć równanie parametryczne ruchu. Określić również drogę, jaką przebędzie ciało do chwili, gdy prędkość ciała zmniejszy się dwukrotnie oraz po jakim czasie to nastąpi?

Rozwiązanie.

Przykładamy do ciała wszystkie siły zewnętrzne oraz siły reakcji więzów. Są nimi siła ciężkości \vec{G} , jako siła zewnętrzna, oraz siły reakcji równi: normalnej \vec{R}_n i stycznej siły tarcia \vec{T} .



Na podstawie II prawa Newtona układamy równania dynamiczne ruchu ciała wzdłuż osi OX i OY

$$m\ddot{x} = -G_{\parallel} - T$$

$$m\ddot{y} = 0 = -G_{\perp} + R_n$$

przy czym

$$G_{\parallel} = mg \sin \alpha \quad G_{\perp} = mg \cos \alpha$$

Ponadto zakładamy, że tarcie ślizgowe suche jest maksymalnie rozwinięte, czyli

$$T = \mu R_n$$

stąd równania dynamiczne

$$R_n - mg \cos \alpha = 0$$

$$m\ddot{x} = -mg \sin \alpha - \mu R_n = -mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha = -mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

Otrzymano w ten sposób równanie różniczkowe ruchu ciała wzdłuż równi

$$m\ddot{x} = -mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$



które całkuje się dwukrotnie obustronnie

$$\int m\ddot{x}dt = \int [-mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)]dt$$
$$m\dot{x}(t) = -mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)t + C_v$$
$$\int m\dot{x}dt = \int [-mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)t]dt + \int C_v dt$$
$$mx(t) = \frac{-mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{2}t^2 + C_v t + C_x$$

Stałe całkowania wyznacza się z warunków początkowych ruchu

$$\dot{x}(t=0) = v_0 = \frac{C_v}{m} \quad \text{stąd } C_v = mv_0$$
$$x(t=0) = 0 = C_x$$

Ostateczna postać równań parametrycznych prędkości i przemieszczenia jest następująca

$$\dot{x}(t) = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)t + v_0$$
$$x(t) = \frac{-g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{2}t^2 + v_0 t$$

Czas t_k po jakim prędkość ciała zmniejszy się do połowy wartości początkowej wynika z równania

$$\dot{x}(t=t_k) = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)t_k + v_0 = \frac{v_0}{2}$$

stąd

$$t_k = \frac{v_0}{2g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} = \frac{10}{2 \cdot 9.81 \cdot (\sin 30^\circ + 0.2 \cdot \cos 30^\circ)} = 0.757 \text{ [s]}$$

natomiast droga przebyta w tym czasie przez ciało wyniesie

$$s = x(t=t_k) = \frac{-g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{2}t_k^2 + v_0 t_k = \frac{3}{8} \frac{v_0^2}{g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} =$$
$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{10^2}{9.81 \cdot (\sin 30^\circ + 0.2 \cdot \cos 30^\circ)} = 5.678 \text{ [m]}$$

Zadanie 14.2.

Działo pokładowe wyrzuca pocisk o masie $m = 10 \text{ kg}$ z prędkością początkową $v_0 = 900 \text{ m/s}$. Zakładając brak oporu powietrza i zerową wysokość pocisku względem Ziemi w chwili początkowej ruchu, należy:

- wyznaczyć równania różniczkowe i parametryczne ruchu pocisku wystrzelonego z działa pod kątem $\alpha = 30^\circ$ względem poziomu;
- wyznaczyć tor ruchu pocisku o maksymalnym zasięgu poziomym x_{\max} i pionowym y_{\max} , oraz kąt względem poziomu wyrzutu pocisku w obu przypadkach.

Literatura: [4] rozdz. 15 str. 241÷268.

Spis literatury

- Kasyk L., Krupiński R.: Poradnik matematyczny. Akademia Morska, Szczecin 2006.
- Leyko J.: Mechanika ogólna. T.1: Statyka i kinematyka. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2005.
- Leyko J.: Mechanika ogólna. T.2: Dynamika. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



-
4. Niezgodziński M. E., Niezgodziński T. Zbiór zadań z mechaniki ogólnej. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.